家一寒假作業 第一冊 數學

例 1:在坐標平面上描出下列各點：
$A\,(3,2)$、$B\,(2,-3)$、$C\,(-1,-2)$、$D\,(0,5)$、$E\,(-4,4)$、$F\,(2,0)$。

例 2:(點到點距離)設平面上兩點 $P\,(1,3)$、$Q\,(9,9)$，求 P、Q 兩點的距離。

解: $\sqrt{(\boldsymbol{x}\text{相差})^2+(\boldsymbol{y}\text{相差})^2}$

利用平面上兩點的距離公式

$\overline{PQ}=\sqrt{(9-1)^2+(9-3)^2}=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10$

Ex1.設平面上兩點 $P\,(5,2)$、$Q\,(8,6)$，求 P、Q 兩點的距離。　答:5

Ex2.設平面上兩點 $P\,(-5,3)$、$Q\,(0,15)$，求 P、Q 兩點的距離。　答:13

例 3:(中點公式)設坐標平面上相異兩點 $P\,(-1,2)$、$Q\,(3,6)$，求 $\overline{PQ}$ 的中點坐標。

解:　**中點**$=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$

用中點坐標公式得 $x=\frac{-1+3}{2}=1$，$y=\frac{2+6}{2}=4$

故 $\overline{PQ}$ 的中點坐標為$(1,4)$

Ex1.設坐標平面上相異兩點 $P\,(-2,3)$、$Q\,(4,5)$，求 $\overline{PQ}$ 的中點坐標。　答:$(1,4)$

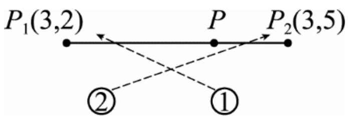
Ex2.求平面上兩點 $P\,(2,-4)$、$Q\,(8,0)$的中點坐標。　答:$(5,-2)$

例 4:(分點公式)設 $P_1(3,2)$、$P_2(3,5)$、$P\,(x,y)$為同一直線上相異三點，若 P 在線段$\overline{P_1P_2}$上，且$\overline{P_1P}:\overline{PP_2}=2:1$，求 P 點坐標。

解: 因為$\overline{P_1P}:\overline{PP_2}=2:1$　利用分點坐標公式得

$x=\frac{1\times3+2\times3}{2+1}=3$　　$y=\frac{1\times2+2\times5}{2+1}=4$

故 P 點坐標為$(3,4)$



Ex1.設 $P_1(1,2)$、$P_2(5,6)$、$P\,(x,y)$為同一直線上相異三點，若 P 在線段$\overline{P_1P_2}$上，且$\overline{P_1P}:\overline{PP_2}=1:3$，求 P 點坐標。　答:$(2,3)$

Ex2.設 $P_1(1,0)$、$P_2(-5,3)$、$P\,(x,y)$為同一直線上相異三點，若 P 在線段$\overline{P_1P_2}$上，且$\overline{P_1P}:\overline{PP_2}=2:1$，求 P 點坐標。　答:$(-3,2)$

例 5:(過兩點的直線斜率)求經過下列各點的直線之斜率：

(1)$(1, 6)$與$(-1, 2)$。

(2)$(5, 1)$與$(-2, 1)$。

(3)$(-3, 1)$與$(-3, -1)$。

解: 斜率 m=$\dfrac{y相減}{x相減}$

(1)斜率 $m=\dfrac{6-2}{1-(-1)}=\dfrac{4}{2}=2$

(2)斜率 $m=\dfrac{1-1}{5-(-2)}=\dfrac{0}{7}=0$

(3)因為 $x_1=x_2=-3$，所以斜率 m 不存在，此直線垂直於 x 軸

Ex1.求經過下列各點的直線之斜率：

(1)$(6, -3)$與$(-2, 5)$。

(2)$(8, -2)$與$(4, -2)$。

(3)$(3, -5)$與$(3, 2)$。 答:(1) -1;(2)0;(3)不存在

Ex2.求經過下列各點的直線之斜率：

(1)$(5, 2)$與$(-2, -3)$。

(2)$(-1, 0)$與$(4, 0)$。

(3)$(-4, 5)$與$(-4, 2)$。 答:(1) $\dfrac{5}{7}$;(2)0;(3)不存在

例 6:(過兩點的直線斜率)求下列各直線的斜率:

(1)直線 $2x+3y+6=0$。

(2)直線 $x-2y+3=0$。

(3)直線 $2y-1=0$。

(4)直線 $x+2=0$。

解: 斜率 m=$-\dfrac{x係數}{y係數}$

(1)直線 $2x+3y+6=0$ 的斜率為 $-\dfrac{2}{3}$

(2)直線 $x-2y+3=0$ 的斜率為 $\dfrac{1}{2}$

(3)直線 $2y-1=0$ 的斜率為 0

(4)直線 $x+2=0$ 的斜率不存在

Ex1.求下列各直線的斜率：

(1)直線 $3x+2y+6=0$。

(2)直線 $2x-y+4=0$。

(3)直線 $3y+2=0$。

(4)直線 $2x-1=0$。 答:(1) $-\dfrac{3}{2}$;(2)2;(3)0;(4)不存在

Ex2.求下列各直線的斜率：

(1)直線 $x-2y-3=0$。

(2)直線 $5x+y+2=0$。

(3)直線 $y=2$。

(4)直線 $x+5=0$。 答:(1) $\dfrac{1}{2}$;(2) -5;(3)0;(4)不存在

例 7:(點斜式)求滿足過點$(2, -1)$且斜率為 3 的直線方程式。

解: 點斜式 $y-y_0=m(x-x_0)$

利用點斜式得直線方程式 $y-(-1)=3(x-2)$

化簡得 $3x-y-7=0$

Ex1.試求滿足過點$(-5, 3)$且斜率為 2 的直線方程式。 答:$2x-y+13=0$

Ex2.試求滿足過點$(3, -2)$且斜率為 0 的直線方程式。 答: $y+2=0$

例 8:(斜截式)求滿足斜率為 3，y 截距為 2 的直線方程式。

解: 斜截式 $\boldsymbol{y=mx+b}$

利用斜截式得 $y=3x+2$

Ex1.求滿足斜率為 2，y 截距為 -5 的直線方程式。 答:$y=2x-5$

Ex2.求滿足斜率為-1，y 截距為 3 的直線方程式。 答:$y=-x+3$

例 9:(點到直線距離)求點$(3,-2)$到直線 L：$4x+3y+4=0$ 的距離。

解: $\mathbf{d}=\dfrac{|點帶入|}{\sqrt{(x係數)^2+(y係數)^2}}$

點$(3,-2)$到直線 L：$4x+3y+4=0$ 的

距離 $d=\dfrac{|4\times3+3\times(-2)+4|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{10}{5}=2$

Ex1.求點$(-2,3)$到直線 L:$3x-4y=2$ 的距離。

答:4

Ex2.求點$(5,-8)$到直線 L：$x-4=0$ 的距離。

答:1

例 10:(餘式定理) 求 $2x^4+x^3-2x^2+3$ 除以 $x-1$ 的餘式。

解: $f(x)\div(x-1)$*的餘式*=$f(1)$

令 $f(x)=2x^4+x^3-2x^2+3$

利用餘式定理

得餘式為 $f(1)=2(1)^4+1^3-2(1)^2+3=4$

Ex1.求 $x^{99}+99$ 除以 $x+1$ 的餘式。答:98

Ex2.求$(x+3)^{10}+x$ 除以 $x+2$ 的餘式。 答:-1

例 11:(因式定理)已知$(x+1)$為 $f(x)=x^4-3x^2+kx-1$ 的因式，求 k 之值。

解: $(x+1)$為$f(x)$的因式$\Leftrightarrow f(-1)=0$

$f(-1)=(-1)^4-3(-1)^2+k(-1)-1=0$

得 $k=-3$

Ex1.已知$(x+2)$為 $f(x)=x^3+kx+12$ 的因式，求 k 之值。 答:$k=2$

Ex2.已知$(x-2)$為 $f(x)=x^3-3x^2+4x+k$ 的因式，求 k 之值。 答:$k=-4$

例 12: k 為實數，若方程式 $x^2+2x-k=0$ 有兩相等實數解，求 k 值。

解:當$b^2-4ac>0$ 時，有兩相異實根

當$b^2-4ac=0$ 時，有重根

當$b^2-4ac<0$ 時，無實根

$\therefore$ 判別式 $b^2-4ac=2^2-4\times1\times(-k)=0$

$\Rightarrow 4+4k=0$ 故 $k=-1$

Ex1.k 為實數，若方程式 $x^2-6x+k=0$ 有兩相等實數解，求 k 值。 答:$k=9$

例 13:(根與係數)若α、β 為方程式$x^2-2x-3=0$ 的兩根，求下列各式的值：

(1) $\alpha+\beta$ (2) $\alpha\times\beta$ (3) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$

(4) $\alpha^2+\beta^2$　(5) $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$ 。

解:兩根之和$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$ 兩根之積$\alpha\times\beta=\frac{c}{a}$

其中 $a=1$　$b=-2$　$c=-3$

(1) $\alpha+\beta=2$

(2) $\alpha\times\beta=-3$

(3) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{2}{3}$

(4) $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

$2^2=\alpha^2+\beta^2+2\times(-3)$

$\alpha^2+\beta^2=10$

(5) $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=-\frac{10}{3}$

Ex1.若 α 、 β 為方程式 $x^2+3x+1=0$ 的兩根，求下列各式的值：

(1) $\alpha+\beta$　(2) $\alpha\times\beta$　(3) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$

(4) $\alpha^2+\beta^2$ 。　答:(1) -3;(2)1;(3) -3;(4)7

Ex2.若 α 、 β 為方程式 $x^2+5x+2=0$ 的兩根，求下列各式的值：

(1) $\alpha+\beta$　(2) $\alpha\times\beta$　(3) $\alpha^2+\beta^2$

(4) $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$ 。　答:(1) -5;(2)2;(3)21;(4) $\frac{21}{2}$