工二寒假作業　第三冊

第一章 三角函數的應用

1.(和差角公式)

$\mathbf{sin}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) =$ $\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$

$\mathbf{sin}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}) =$ $\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$

$\mathbf{cos}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) =$ $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\mathbf{cos}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}) =$ $\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$\mathbf{tan}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) = \frac{tan\alpha+tan\beta}{1-tan\alpha tan\beta}$

$\mathbf{tan}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}) = \frac{tan\alpha-tan\beta}{1+tan\alpha tan\beta}$

2.(二倍角公式)

$\mathbf{sin2\alpha} = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\mathbf{cos2\alpha} = \cos^2\alpha - sin^2\alpha = 2cos^2\alpha - 1$

$= 1 - 2sin^2\alpha$

$\mathbf{tan2\alpha} == \frac{2tan\alpha}{1-tan^2\alpha}$

3.(正弦定理) R: 為三角形外接圓半徑

(1) $a{:}b{:}c = \sin A{:}\sin B{:}\sin C$

(2) $\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC} = 2R$

4.(餘弦定理)

(1) $a^2+b^2-c^2$=2ab × cosC

(2)$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

5.(Δ面積公式) 設$s = \frac{1}{2}\times$(Δ周長)

(1) **已知兩邊長 a、b 及一夾角θ時，**

Δ面積=$\frac{1}{2}$ab× sinθ

(2)已知三邊長為a、b、c時，

Δ面積= $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

6.(最大值與最小值)

(1) $y = f(x) = a\times sinx + b\times cosx$ ，

y 有最大值 $\sqrt{a^2+b^2}$、最小值$-\sqrt{a^2+b^2}$

(2) $y = f(x) = asinx + b$，因 $-1 \le \sin x \le 1$

用$\sin x = 1$、-1 代入，可得 y 的最大最小值

練習題:

1.(1)$\sin(\alpha+\beta) =$ ____________________

(2)$\sin(\alpha-\beta) =$ ____________________

(3)$\cos(\alpha+\beta) =$ ____________________

(4)$\cos(\alpha-\beta) =$ ____________________

(5)$\tan(\alpha+\beta) =$ ____________________

(6)$\tan(\alpha-\beta) =$ ____________________

(7)$\sin(2\theta) =$ ____________________

(8)$\cos(2\theta) =$ ____________________

(9)$\tan(2\theta) =$ ____________________

(10)$asinx + bcosx$ 的最大值為________

最小值為__________

2.設α、β 均為銳角，若 $\tan\alpha = 2$，$\tan\beta = 3$，求 $\tan(\alpha+\beta)$的值。　　答:-1

3.設 $f(\theta) = 4\sin\theta - 3\cos\theta + 5$，求 $f(\theta)$的最大值及最小值。　　答:最大值 10，最小值 0

4.設△ABC 中，$\sin A = \frac{2}{3}$，$\overline{BC} = 8$，求△ABC 的外接圓半徑。　　答:6

6.已知△ABC 中，$a = 3$，$b = 5$，$c = 7$，求 $\cos C$。　　答:$\frac{-1}{2}$

第二章 複數

1.(**i的定義**)虛數i是$x^2=-1$的一解，

所以 $i^2=-1$。

2.(**i的性質**)2)$i^2=-1$、$i^3=-i$、$i^4=1$。

3.(**複數的相等**)

$\mathrm{a}+\mathrm{bi}=\mathrm{c}+\mathrm{di} \iff \mathrm{a}=\mathrm{c}$ 且 $\mathrm{b}=\mathrm{d}$ 。

4.(**複數絕對值與共軛複數**) 複數 $\mathrm{z}=2-3\mathrm{i}$，

(1) z的共軛複數$\overline{\mathrm{z}}=2+3\mathrm{i}$ ；

(2) z的絕對值$|z|=\sqrt{(2)^2+(-3)^2}$；

(3) $\overline{z}$的絕對值$|\overline{z}|=\sqrt{(2)^2+(3)^2}$。

因此，$|z|=|\overline{z}|$。

5.(**複數絕對值性質**)

$|z_1\times z_2|=|z_1|\times|z_2|$，$\left|\frac{z_2}{z_1}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$。

6.(**化為極式**) $\mathrm{r}\times(\cos\theta+\mathrm{i}\times\sin\theta)$

例 1:將 $\mathrm{z}=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 化為極式

第一步:$\mathrm{r}=|z|=\sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$。

第二步:$\begin{cases} cos\theta=\frac{1}{2} \\ sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ 去推得$\theta=60°$。 因此

$1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 的極式為 $2(\cos 60°+\mathrm{i}\sin 60°)$

例 2:$\mathrm{z}=\sqrt{3}\mathrm{i}-1$化為極式。

第一步:$\mathrm{r}=|z|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$。

第二步:$\begin{cases} cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\theta=\frac{-1}{2}\end{cases}$ 由$(\cos\theta,\sin\theta)=(+,-)$

得知 θ 在第四象限，$\because |x|>|y|$（角度小於 45°），主幅角$\theta=360°-30°=330°$。

因此$\sqrt{3}\mathrm{i}-1$ 的極式為 $2(\cos 330°+\mathrm{i}\sin 330°)$

7.(**棣美弗定理**) $[2(cos30°+i\times sin30°)]^8$

$=2^{\mathbf{8}}(cos30°\times\mathbf{8}+i\times sin30°\times\mathbf{8})$

8.(**複數 n 次方根**) 解 $x^4=-8+8\sqrt{3}i$

將$-8+8\sqrt{3}i$化為極式$16(\cos 120°+\mathrm{i}\sin 120°)$

$=r^4(cos4\theta+isin4\theta)$，可得$\mathrm{r}=2$、 $\theta=30°$

因此，第一個解$x_0=\boldsymbol{2(cos30°+isin30°)}$

這 4 個解均分圓周，$360°\div 4=90°$，故

$x_1=2(\cos(30°+90°)+isin(30°+90°))$

$x_2=2(\cos(30°+180°)+isin(30°+180°))$

$x_3=2(\cos(30°+270°)+isin(30°+270°))$

9.(**$x^3=1$虛根ω**)

(1)$\omega^3=1$ (2)$1+\omega+\omega^2=0$

練習題:

1.若$(a-2)+2i=3+(3-b)i$，其中 a、b 為實數，求 a、b 之值。 答:$a=5$，$b=1$

2.寫出下列各複數的共軛複數：

(1)$z_1=1+2i$ (2)$z_2=2-i$ (3)$z_3=3$

(4)$z_4=-5i$ 答:(1)$1-2i$;(2)$2+i$;(3)3;(4)$5i$

3.設 $z_1=3-2i$，$z_2=1+3i$， 答:(1)$4+i$;(2)$2-5i$

求：(1)z_1+z_2 (2)z_1-z_2

4.設 $z_1=3-2i$，$z_2=1+3i$，求 $z_1\times z_2$。

答:$9+7i$

5.設 $z_1=3-2i$，$z_2=1+3i$，求$\frac{z_1}{z_2}$ 。

答:$-\frac{3}{10}-\frac{11}{10}i$

6.求下列各式之值：

(1) $\sqrt{2}\times\sqrt{-3}$　(2) $\sqrt{-2}\times\sqrt{3}$　(3) $\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}$

答:(1) $\sqrt{6}i$;(2) $\sqrt{6}i$;(3) $-\sqrt{6}$

7.求下列各式之值：

(1)i^{200}

(2)i^{2009}

(3)i^{210}

(4)i^{59}

答:(1)1;(2)i;(3) -1;(4) $-i$

8.判別方程式 $x^2-2x+3=0$ 兩根的性質，並解之。　答:兩根為兩共軛虛數； $x=1\pm\sqrt{2}i$

9.求下列各複數的絕對值：答:(1) $\sqrt{5}$;(2) $\sqrt{13}$;(3)2

(1) $z_1=1+2i$　(2) $z_2=3-2i$　(3) $z_3=-2i$

10.求下列各式之值：　答:(1) $5\sqrt{2}$;(2) $\sqrt{2}$;(3)25

(1)$|(3+4i)(1-i)|$　(2)$\left|\frac{3+i}{2-i}\right|$　(3)$|(-2+i)^4|$

11.求下列各式之值：　答:(1) i;(2) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

(1)$(\cos 18°+i\sin 18°)^5$

(2) $\frac{(\cos 8°+i\sin 8°)^6(\cos 25°+i\sin 25°)^4}{(\cos 11°+i\sin 11°)^8}$

第三章 指數與對數及其運算

1.指數律:

(1) $2^3 \times 2^4 =$ ____， $2^3 \div 2^4 =$ ____ 。

(2)$(2\times 3)^4 =$ ____， $(\frac{2}{3})^4 =$ _____ 。

(3)$(2^3)^4 =$ _____。

(4) $2^{-1} =$ ____，$2^{-3} =$ ______。

(5)$3^{\frac{1}{2}} =$ _____， $2^{\frac{4}{3}} =$ ______。

(6)$2^a > 2^b \Leftrightarrow$ __________，

$(\frac{1}{2})^a > (\frac{1}{2})^b \Leftrightarrow$ __________，

2.對數律: $\log_a b$有意義 $\Leftrightarrow$

(1)$2^3 = 8 <=> \log_2 8 =$ _____。

(2)$2^{\log_2 3} =$ _____，$\log_2 2^3=$ _____。

(3)$\log_{10} 2 + \log_{10} 3 =$ _________，

$\log_{10} 2 - \log_{10} 3 =$ ________ 。

(4) $\log_{2^a} 3^b =$ ____________。 (5)(換底公式) $\log_2 3 =$ __________。

取 c=1 可得 $\log_2 3 \times \log_3 2 = 1$

(6)$\log_2 a > \log_2 b \Leftrightarrow$ _________，

$\log_{\frac{1}{2}} a > \log_{\frac{1}{2}} b \Leftrightarrow$ ___________。

3.對數的應用

(1)**首數**:必須為整數 ， **尾數**:必須 0~1 之間

(2)若 A 介於 1~10 之間，則**logA介於 0~1 之間**

(3)$\log 12345 = \log 1234.5 + 1 = \log 123.45 + 2$

$= \log 12.345 + 3 = \log 1.2345 + 4$

以上四者何者符合 **尾數+首數** 的規定?

答: ________________

1.化簡$\left(\frac{1}{27}\right)^{-2} \times \left(\frac{1}{9}\right)^{3} \times 81^{\frac{1}{4}} = ?$ 答:3

2.若$a = 2^{-3}$ ，$b = 2^5$ ，$c = 2^0$ ，則a 、b 、c 之大小順序為? 答:$a < c < b$

3.$\log_5 4 - \log_5 10 - \log_5 50 = ?$ 答:-3

4.求$\log_4 8 = ?$ 答:$\frac{3}{2}$

5.$\log 2 = a$，$\log 3 = b$，則 $\log 18 = ?$ 答:$a + 2b$

6.設 $a = \log_{\frac{1}{3}} 4$，$b = \log_{\frac{1}{3}} 5$，$c = \log_{\frac{1}{3}} 8$，則 a、b、c 的大小關係為? 答:$a > b > c$

7.設 $\log x = -4.6819$，則(1)$\log x$ 之首數 $= ?$
(2)$\log x$ 之尾數 $= ?$ 答:(1)-5 (2)0.3181

8.若$\log 7 = 0.8451$ ，則7^{10}為幾位數? 答:9