工二寒假作業　第三冊

第一章 數列與級數:

(1)等差數列: $a_{10} = a_3 + 7d$

(2)等差級數: $S_7 = \sum_{k=1}^{7} \boldsymbol{a_k} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_7 = \frac{\boldsymbol{a_1+a_7}}{\boldsymbol{2}} \times$ **項數**

(3)等比數列: $a_{10} = a_3 \times r^7$

(4)等比級數: $S_7 = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots a_7 = \frac{\boldsymbol{a_8-a_1}}{\boldsymbol{r-1}}$

(5)等差中項與等比中項:

若a、b、c成等差數列 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{b}+\mathrm{b}=\mathrm{a}+\mathrm{c}$

若a、b、c成等比數列 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{b}\times\mathrm{b}=\mathrm{a}\times\mathrm{c}$

練習題:

1.設 7、13、19、25、……、a_n是一等差數列，則其第 11 項為?　答:67

2.某一等差數列的第4項為7，第10項為31，則第12項為?　答: 39

3.求等差級數$1+3+5+\cdots+45=$?　答: 529

4.$\sum_{k=2}^{21}(3k-4)=$?　答:610

5.於 2 與 20 之間插入五個數，使成等差數列，則此插入五數中第四個數為?　答:14

6.設一數列前 n 項的和 $S_n = n^2 - 2n$，求此數列的第 8 項為?　答:13

7.一等比數列，第2項為20，第5項為160，則其公比為?　答: 2

8.等比數列第 5 項為 3，第 9 項為 6，則第 25 項為?　答:96

9.若 a、b、3、c、d 五個數成等比數列，則 $abcd$ 之值為何？　答:81

10.50 與 72 的(1)等差中項為?；(2)等比中項為?

答:(1) 61;(2) ±60

第二章 指數與對數及其運算

1.指數律:

(1) $2^3 \times 2^4 =$ ____， $2^3 \div 2^4 =$ ____ 。

(2)$(2 \times 3)^4 =$ ____， $(\frac{2}{3})^4 =$ _____ 。

(3)$(2^3)^4 =$ _____。

(4) $2^{-1} =$ ____，$2^{-3} =$ ______。

(5)$3^{\frac{1}{2}} =$ _____，$2^{\frac{4}{3}} =$ ______。

(6)$2^a > 2^b \Leftrightarrow$ __________，

$(\frac{1}{2})^a > (\frac{1}{2})^b \Leftrightarrow$ __________，

2.對數律: $\log_a b$有意義 $\Leftrightarrow$

(1)$2^3 = 8 <=> \log_2 8 =$ _____。

(2)$2^{\log_2 3} =$ _____，$\log_2 2^3 =$ _____。

(3)$\log_{10} 2 + \log_{10} 3 =$ _________，

$\log_{10} 2 - \log_{10} 3 =$ ________ 。

(4) $\log_{2^a} 3^b =$ ____________。 (5)(換底公式) $\log_2 3 =$ __________。

取 c=1 可得 $\log_2 3 \times \log_3 2 = 1$

(6)$\log_2 a > \log_2 b \Leftrightarrow$ _________，

$\log_{\frac{1}{2}} a > \log_{\frac{1}{2}} b \Leftrightarrow$ ___________。

3.對數的應用

(1)**首數**:必須為整數 ， **尾數**:必須 0~1 之間

(2)若 A 介於 1~10 之間，則**logA介於 0~1 之間**

(3)$\log 12345 = \log 1234.5 + 1 = \log 123.45 + 2$

$= \log 12.345 + 3 = \log 1.2345 + 4$

以上四者何者符合 **尾數+首數** 的規定?

答: _________________

1.化簡$\left(\frac{1}{27}\right)^{-2} \times \left(\frac{1}{9}\right)^{3} \times 81^{\frac{1}{4}} = ?$ 答:3

2.若$a = 2^{-3}$ ，$b = 2^5$ ，$c = 2^0$ ，則a 、b 、c 之大小順序為? 答:$a < c < b$

3.$\log_5 4 - \log_5 10 - \log_5 50 = ?$ 答:-3

4.求$\log_4 8 = ?$ 答:$\frac{3}{2}$

5.$\log 2 = a$，$\log 3 = b$，則 $\log 18 = ?$ 答:$a + 2b$

6.設 $a = \log_{\frac{1}{3}} 4$，$b = \log_{\frac{1}{3}} 5$，$c = \log_{\frac{1}{3}} 8$，則 a、b、c 的大小關係為? 答:$a > b > c$

7.設 $\log x = -4.6819$，則(1)$\log x$ 之首數 $= ?$
(2)$\log x$ 之尾數 $= ?$ 答:(1)-5 (2)0.3181

8.若$\log 7 = 0.8451$ ，則7^{10}為幾位數? 答:9

第三章 排列組合

1.(**加法原理**) 完成一件事情**僅需一個步驟**，其完成的方法數=各類別的方法數相加

2.(**乘法原理**) 完成一件事情**需一個步驟以上**，其完成的方法數=各步驟的方法數相乘

3.(**直線排列**) P_5^5:5 件不同物中，選全部 5 件排成一列的方法數$=5\times4\times3\times2\times1=5!$

P_3^5:5 件不同物中，選其中 3 件排成一列的方法數$=5\times4\times3$

4.(**環狀排列**) (1) 5 人圍成一圈的方法數=(5 人排成一列的方法數)÷(人數 5)

(2) 5 人之中選出 3 人圍成一圈的方法數=(5 人之中選出 3 人排成一列的方法數)÷(人數 **3**)

5.(**相同物排列**) aabbbc 這 6 個字母的直線排列數為$(6!)\div(\mathbf{2}!\times\mathbf{3}!)$

6.(**重複排列**) 由乘法原理來想(**用會消耗性的去選不會消耗性的**)

7.(**組合**) (1)C_3^5:5 件不同物中，選出 3 件的方法數$\left(\text{這 3 件不用排順序}\right)=P_3^5\div3!$

$=\mathbf{(5\times4\times3)\div(3\times2\times1)}$

(2) $C_3^5=C_2^5$，$C_{97}^{100}=C_3^{100}$，⋯

8.(**重複組合**) $H_5^3=C_5^{3+5-1}$

$\boldsymbol{H_5^3}$:3 個人分 5 件相同物的方法數(任意分)

:從 3 類中選 5 件的方法數

:$a+b+c=5$有幾組非負整數解

9.(**二項式定理**)

$(A+B)^{10}=C_0^{10}A^{10}+C_1^{10}A^9B^1+\cdots+C_{10}^{10}B^{10}$

$C_0^{10}+C_1^{10}+C_2^{10}+\cdots+C_{10}^{10}=2^{10}$

$C_0^{10}+C_2^{10}+\cdots+C_{10}^{10}=C_1^{10}+C_3^{10}+\cdots+C_9^{10}$

$(A+B)^{10}$展開後的某一項可設為$C_r^{10}A^{10-r}B^r$

練習題:

1.一飾品店中有 5 種不同款式的皮包，6 種不同花色的圍巾，今要在此飾品店中任意選購**一個皮包及一條圍巾**，共有多少種選購方法?

答:30 種

2.甲、乙、丙、⋯等七人排成一列，求下列各排列數： 答:(1)5040;(2)720 種;(3)1440 種

(1)任意排法

(2)規定甲、乙、丙三人必須相鄰

(3)規定甲、乙、丙任二人均不得相鄰

3.將 a、b、b、c、c、c 六個字母排成一列，問有多少種不同的排法？ 答:60 種

4.將三封不同的信任意投入四個相異的郵筒，有多少種不同的投法？ 答:64 種

5.四對情侶手拉手圍成一個圓圈，有多少種不同的排法？ 答:5040 種

6. 數學抽考，由 10 題中任意選做 6 題，共有多少種選做方法？ 答:210 種

7. 5 個相同的玩具，任意分給 3 位兒童，問可能的分法有幾種？ 答:21 種

8.求下列各值： 答:(1)1024 (2)512 (3)512

(1)$C_0^{10}+C_1^{10}+C_2^{10}+\cdots+C_{10}^{10}=$

(2)$C_0^{10}+C_2^{10}+C_4^{10}+C_6^{10}+C_8^{10}+C_{10}^{10}=$

(3)$C_1^{10}+C_3^{10}+C_5^{10}+C_7^{10}+C_9^{10}=$

第四章　機率與統計

1.(**排容原理**)

設 集合 A:國文及格的人　B:數學及格的人

$n(A)$ =國文及格人數　$n(B)$ =數學及格人數

$n(A\cup B)$ =國文或數學及格人數

$n(A\cap B)$ =國文及數學及格人數

則 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

2.(**古典機率**)

例:投擲一粒骰子，求出現偶數點的機率。

樣本空間 S:一件事情的所有情況之集合

則 S={點數 1、2、3、4、5、6}　$n(S)=6$

令集合 A:出現偶數點的事件

則 A={點數 2、4、6}　$n(A)=3$

出現偶數點的機率 P(A)= 3/6

3.(**條件機率**)

在 A 條件下出現 B 之機率 $P(B|A)$

$=n(A\cap B)/n(A)=P(A\cap B)/P(A)$

4.(**條件機率的乘法原理**)

$P(A\cap B)=P(A)\times P(B|A)$

5.(**互斥事件、獨立事件**)

(1) 若 $A\cap B=\emptyset$，稱 A、B 為互斥事件

(2) 若 $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$，稱 A、B 為獨立事件，此時 $P(B|X)=P(B)$ (與 X 無關)

練習題:

1.擲兩顆公正的骰子一次，求：

(1)出現點數和為 8 的機率

(2)出現點數和小於 5 的機率

(3)出現兩顆骰子點數相同的機率

答:(1) $\frac{5}{36}$;(2) $\frac{1}{6}$;(3) $\frac{1}{6}$

2.自裝有 3 紅球、4 白球、5 黑球的袋中，一次取出三球，若每球被取到的機會均等，求：(1)所取三球均不同色的機率

(2)所取三球均同色的機率

答:(1) $\frac{3}{11}$;(2) $\frac{3}{44}$

3.一袋中有大小相同的紅球 5 個、白球 3 個，設每球被取到的機會相等，今由袋中每次取出一球，取出後不放回，連續兩次，求依序取出白球、紅球的機率。　答: $\frac{15}{56}$

4.擲兩顆公正骰子一次，在點數和為 8 的條件下，求兩顆骰子均出現偶數點的機率。答: $\frac{3}{5}$

5.甲、乙二人射擊同一目標，彼此互不影響，甲的命中率為 $\frac{2}{5}$ ，乙的命中率為 $\frac{1}{4}$ ，今二人同時向目標射擊，求恰有一人命中目標的機率。

答: $\frac{9}{20}$

6.發行每張 100 元的公益彩券 20000 張，其中特獎 1 張獎金 50 萬元，頭獎 2 張獎金各 20 萬元，貳獎 30 張獎金各 1 萬元，求買彩券一張可得**獎金**的期望值。　答:60 元