家一寒假作業 第一冊 數學

例 1:在坐標平面上描出下列各點：

$A\,(3\,,2)$、$B\,(2\,,-3)$、$C\,(-1\,,-2)$、$D\,(0\,,5)$、$E\,(-4\,,4)$、$F\,(2\,,0)$。

例 2:(點到點距離)設平面上兩點 $P\,(1\,,3)$、$Q\,(9\,,9)$，求 P、Q 兩點的距離。

解: $\sqrt{(x相差)^2+(y相差)^2}$

利用平面上兩點的距離公式

$\overline{PQ}=\sqrt{(9-1)^2+(9-3)^2}=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10$

Ex1.設平面上兩點 $P\,(5\,,2)$、$Q\,(8\,,6)$，求 P、Q 兩點的距離。　答:5

Ex2.設平面上兩點 $P\,(-5\,,3)$、$Q\,(0\,,15)$，求 P、Q 兩點的距離。　答:13

例 3:(中點公式)設坐標平面上相異兩點 $P\,(-1\,,2)$、$Q\,(3\,,6)$，求 $\overline{PQ}$ 的中點坐標。

解:　中點$=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$

用中點坐標公式得 $x=\frac{-1+3}{2}=1$，$y=\frac{2+6}{2}=4$

故 $\overline{PQ}$ 的中點坐標為$(1\,,4)$

Ex1.設坐標平面上相異兩點 $P\,(-2\,,3)$、$Q\,(4\,,5)$，求 $\overline{PQ}$ 的中點坐標。　答:$(1\,,4)$

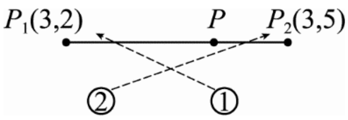
Ex2.求平面上兩點 $P\,(2\,,-4)$、$Q\,(8\,,0)$的中點坐標。　答:$(5\,,-2)$

例 4:(分點公式)設 $P_1(3\,,2)$、$P_2(3\,,5)$、$P\,(x\,,y)$ 為同一直線上相異三點，若 P 在線段 $\overline{P_1P_2}$ 上，且 $\overline{P_1P}:\overline{PP_2}=2:1$，求 P 點坐標。

解: 因為 $\overline{P_1P}:\overline{PP_2}=2:1$　利用分點坐標公式得

$x=\frac{1\times3+2\times3}{2+1}=3$　　$y=\frac{1\times2+2\times5}{2+1}=4$

故 P 點坐標為$(3\,,4)$



Ex1.設 $P_1(1\,,2)$、$P_2(5\,,6)$、$P\,(x\,,y)$為同一直線上相異三點，若 P 在線段 $\overline{P_1P_2}$ 上，且 $\overline{P_1P}:\overline{PP_2}=1:3$，求 P 點坐標。　答:$(2\,,3)$

Ex2.設 $P_1(1\,,0)$、$P_2(-5\,,3)$、$P\,(x\,,y)$為同一直線上相異三點，若 P 在線段 $\overline{P_1P_2}$ 上，且 $\overline{P_1P}:\overline{PP_2}=2:1$，求 P 點坐標。　答:$(-3\,,2)$

例 5:(過兩點的直線斜率)求經過下列各點的直線之斜率：

(1)$(1, 6)$與$(-1, 2)$。

(2)$(5, 1)$與$(-2, 1)$。

(3)$(-3, 1)$與$(-3, -1)$。

解: 斜率 m=$\dfrac{y相減}{x相減}$

(1)斜率 $m=\dfrac{6-2}{1-(-1)}=\dfrac{4}{2}=2$

(2)斜率 $m=\dfrac{1-1}{5-(-2)}=\dfrac{0}{7}=0$

(3)因為 $x_1=x_2=-3$，所以斜率 m 不存在，此直線垂直於 x 軸

Ex1.求經過下列各點的直線之斜率：

(1)$(6, -3)$與$(-2, 5)$。

(2)$(8, -2)$與$(4, -2)$。

(3)$(3, -5)$與$(3, 2)$。 答:(1)-1;(2)0;(3)不存在

Ex2.求經過下列各點的直線之斜率：

(1)$(5, 2)$與$(-2, -3)$。

(2)$(-1, 0)$與$(4, 0)$。

(3)$(-4, 5)$與$(-4, 2)$。 答:(1)$\dfrac{5}{7}$;(2)0;(3)不存在

例 6:(過兩點的直線斜率)求下列各直線的斜率:

(1)直線 $2x+3y+6=0$。

(2)直線 $x-2y+3=0$。

(3)直線 $2y-1=0$。

(4)直線 $x+2=0$。

解: 斜率 m=$-\dfrac{x係數}{y係數}$

(1)直線 $2x+3y+6=0$ 的斜率為$-\dfrac{2}{3}$

(2)直線 $x-2y+3=0$ 的斜率為$\dfrac{1}{2}$

(3)直線 $2y-1=0$ 的斜率為 0

(4)直線 $x+2=0$ 的斜率不存在

Ex1.求下列各直線的斜率：

(1)直線 $3x+2y+6=0$。

(2)直線 $2x-y+4=0$。

(3)直線 $3y+2=0$。

(4)直線 $2x-1=0$。 答:(1)$-\dfrac{3}{2}$;(2)2;(3)0;(4)不存在

Ex2.求下列各直線的斜率：

(1)直線 $x-2y-3=0$。

(2)直線 $5x+y+2=0$。

(3)直線 $y=2$。

(4)直線 $x+5=0$。 答:(1)$\dfrac{1}{2}$;(2)-5;(3)0;(4)不存在

例 7:(點斜式)求滿足過點$(2, -1)$且斜率為 3 的直線方程式。

解: 點斜式 $y-y_0=m(x-x_0)$

利用點斜式得直線方程式 $y-(-1)=3(x-2)$

化簡得 $3x-y-7=0$

Ex1.試求滿足過點$(-5, 3)$且斜率為 2 的直線方程式。 答:$2x-y+13=0$

Ex2.試求滿足過點$(3, -2)$且斜率為 0 的直線方程式。 答: $y+2=0$

例 8:(斜截式)求滿足斜率為 3，y 截距為 2 的直線方程式。

解: 斜截式 $y = mx + b$

利用斜截式得 $y = 3x + 2$

Ex1.求滿足斜率為 2，y 截距為 -5 的直線方程式。 答:$y = 2x - 5$

Ex2.求滿足斜率為-1，y 截距為 3 的直線方程式。 答:$y = -x + 3$

例 9:(點到直線距離)求點$(3, -2)$到直線 L：$4x + 3y + 4 = 0$ 的距離。

解: $\mathbf{d} = \dfrac{|點帶入|}{\sqrt{(x係數)^2+(y係數)^2}}$

點$(3, -2)$到直線 L：$4x + 3y + 4 = 0$ 的

距離 $d = \dfrac{|4\times3+3\times(-2)+4|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \dfrac{10}{5} = 2$

Ex1.求點$(-2, 3)$到直線 L:$3x - 4y = 2$ 的距離。

答:4

Ex2.求點$(5, -8)$到直線 L：$x - 4 = 0$ 的距離。

答:1

例 10:(度與弧度) (1)將 45°化為弧度(2)將 $\frac{2\pi}{3}$ 弧度化為度。

解: π弧度 = 180°，1弧度 = ___ ，1° = ___

(1)$45° = 45 \times \dfrac{\pi}{180}$ 弧度 $= \dfrac{\pi}{4}$ 弧度

(2)$\dfrac{2\pi}{3}$ 弧度 $= \dfrac{2\pi}{3} \times \dfrac{180°}{\pi} = 120°$

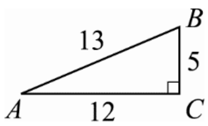
Ex1.(1)將 36°化為弧度 答:(1)$\frac{\pi}{5}$ 弧度;(2)40°

(2)將 $\frac{2\pi}{9}$ 弧度化為度。

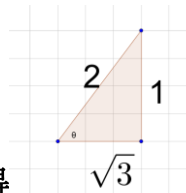
例 11:(判別象限)下列各角在標準位置時，分別為第幾象限角？ 答:二、一、四、三

(1)540° (2) $-60°$ (3)330° (4)$-\frac{2\pi}{3}$ 。

例 12:(三角函數定義)如圖，直角△ABC 中，$\sin A$、$\cos A$、$\tan A$、$\cot A$、$\sec A$、$\csc A$ 之值。

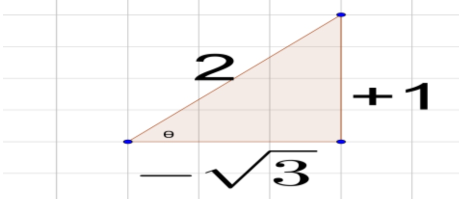


例 13:已知θ 為第二象限角且 $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，求 $\cos\theta$ 、$\tan\theta$。



解: $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 可得

θ 為第二象限角$(-,+)$可得



所以 $\sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{-1}{2} = -\dfrac{1}{2}$

$\tan\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$

Ex1.已知θ 為第二象限角且$\sin\theta=\frac{1}{2}$，求$\cos\theta$ 、$\tan\theta$。　答:$\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ex2.已知θ 為第三象限角且$\tan\theta=\frac{3}{4}$，求$\sin\theta$ 、$\cos\theta$。　答:$\sin\theta=-\frac{3}{5}$ 、$\cos\theta=-\frac{4}{5}$

例 14:設 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$，求 $\sin\theta\times\cos\theta$ 之值。

解: $\boldsymbol{sin^2\theta+cos^2\theta=1}$

$\boldsymbol{(sin\theta+cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta}$

因為 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$

將兩邊平方得 $\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=2$

則 $1+2\sin\theta\cos\theta=2$

故 $\sin\theta\times\cos\theta=\frac{1}{2}$

Ex1.$\sin\theta+\cos\theta=\frac{4}{3}$，求 $\sin\theta\times\cos\theta$ 之值。答:$\frac{7}{18}$

例 15:(△面積公式)在△ABC 中，已知$\overline{AC}=5$、$\overline{AB}=4$、$\angle A=60°$，求△ABC 的面積。

解: $\Delta=\frac{1}{2}\times$(*邊長*)$\times$(*邊長*)$\times$ ***sin**夾角*

$\Delta=\frac{1}{2}\times5\times4\times\sin60°=5\sqrt{3}$

Ex1.在△ABC 中，已知$\overline{AC}=10$、$\overline{AB}=8$、$\angle A=30°$，求△ABC 的面積。　答:20

例 16:(正弦定理)已知△ABC 之外接圓的半徑為 4 且$\angle A=60°$，求$\overline{BC}$ 的長度。

解:利用正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\boldsymbol{2R}$

則$\frac{a}{\sin60°}=2\times4$，得 $a=4\sqrt{3}$

Ex1.已知△ABC 之外接圓的半徑為 8 且$\angle A=30°$，求$\overline{BC}$ 的長度。　答:8

例 17:(餘弦定理)在△ABC 中，已知$\overline{AB}=5$、$\overline{AC}=8$、$\overline{BC}=7$，求 $\cos A$。

解:利用餘弦定理 $\boldsymbol{a^2=b^2+c^2-2bc\cos A}$

得

$$\cos A=\frac{\overline{AC}^2+\overline{AB}^2-\overline{BC}^2}{2\overline{AC}\times\overline{AB}}=\frac{8^2+5^2-7^2}{2\times8\times5}=\frac{1}{2}$$

Ex1.在△ABC 中，已知$\overline{AB}=13$、$\overline{AC}=8$、$\overline{BC}=7$，求 $\cos C$。　答:$\frac{-1}{2}$

例 18:(三角測量)杰倫站在距離樹根 20 公尺處測得$\angle A=60°$，求樹的高度。　答:$20\sqrt{3}$