家二寒假作業　第三冊 數學

例 1:(一元二次不等式)解一元二次不等式

(1) $x^2-2x-15>0$。

解:$(x+3)(x-5)=0$的解為 $x=-3$、5

$(x+3)(x-5)<0$的解為 $x=-3$、5之間

$(x+3)(x-5)>0$的解為 $x=-3$、5之外

本題可化為$(x+3)(x-5)>0$

$\therefore x>5$或$x<-3$

(2)解一元二次不等式 $2x^2-x-6<0$。

本題可化為$(2x-3)(x+2)<0$

其解為$x=-2$、$\frac{3}{2}$之間　　$\therefore\ -2<x<\frac{3}{2}$

(3)解一元二次不等式 $-x^2+4x-3<0$。

先$\times -1$，化為$x^2-4x+3>0$

再分解為$(x-1)(x-3)>0$

解為 $x=1$、3之外　$\therefore x>3$或$x<1$

Ex1.(1)解一元二次不等式 $x^2-2x-3\geq 0$。

答:$x\leq -1$ 或 $x\geq 3$

(2)解一元二次不等式 $3x^2-4x+1\leq 0$。

答:$\frac{1}{3}\leq x\leq 1$

(3)解一元二次不等式 $-x^2-4x+5>0$。

答:$-5<x<1$

Ex2.(1)解一元二次不等式 $x^2-3x-10>0$。

答:$x<-2$ 或 $x>5$

(2)解一元二次不等式 $2x^2+x-3<0$。

答:$-\frac{3}{2}<x<1$

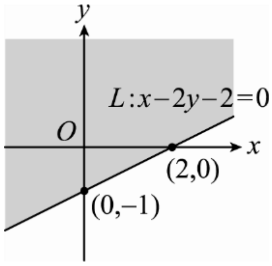
(3)解一元二次不等式 $-x^2+2x+3<0$。

答:$x<-1$ 或 $x>3$

例 2:(1)圖示不等式 $x-2y-2\leq 0$ 的解。

解:作直線 L：$x-2y-2=0$

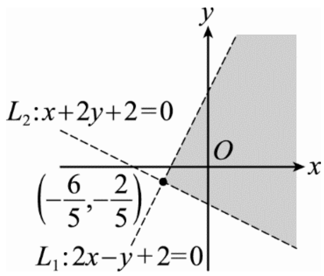
因為此不等式包含直線 L，所以直線 L 以實線畫出　則不等式 $x-2y-2\leq 0$ 的圖形為直線 L 及直線 L 的左側半平面　　如圖所示**:**



(2)圖示聯立不等式$\begin{cases}2x-y+2>0\\x+2y+2>0\end{cases}$的解。

求出兩個圖解之共同部分　即為聯立不等式

$\begin{cases}2x-y+2>0\\x+2y+2>0\end{cases}$的圖解，如圖所示

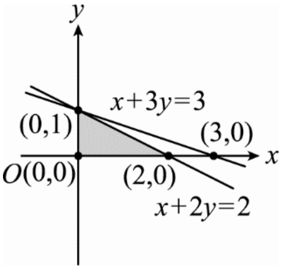


Ex1.圖示二元一次不等式 $3x-y-6\leq 0$ 的解。

Ex2.圖示聯立不等式$\begin{cases}x-2y-2\leq 0\\2x+y-1>0\end{cases}$的解。

例 2:在滿足聯立不等式$\begin{cases} x+2y\le 2 \\ x+3y\le 3 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$的條件下，求 $f(x,y)=x-y$ 的最大值。

解:求出斜線區域的頂點座標(有三個)，用這三個點帶入 $f(x,y)=x-y$ 來求最大或最小值



當 $f(0,0)=0$，$f(2,0)=2$，$f(0,1)=-1$

故當 $x=2$，$y=0$ 時，目標函數 $f(x,y)=x-y$ 有最大值 2

Ex1.在滿足聯立不等式$\begin{cases} x-y\le 1 \\ x+2y\le 4 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$的條件下，求 $f(x,y)=2x+y$ 的最大值。　答:5

Ex2.在滿足聯立不等式$\begin{cases} 2x-3y\le 0 \\ x+y\ge 5 \\ x\ge 0 \end{cases}$的條件下，求 $f(x,y)=3x+2y$ 的最小值。　答:10

例 3:(圓方程式)

(1)求以$(-1,3)$為圓心，半徑為 2 的圓方程式。

(2)求圓 C：$(x+3)^2+(y-5)^2=8$ 的圓心與半徑。

(3)求以$(2,-3)$為圓心且通過$(-1,1)$的圓方程式。

解:圓的標準式$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$，

(1)圓之方程式為$(x+1)^2+(y-3)^2=4$

(2)由圓的標準式得知$r^2=8$，圓心為$(-3,5)$，半徑為$\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

(3)因為所求的圓通過$(-1,1)$

所以半徑為$(2,-3)$到$(-1,1)$的距離

即$r=\sqrt{[2-(-1)]^2+(-3-1)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

利用圓的標準式可知

所求的圓方程式為$(x-2)^2+(y+3)^2=25$

Ex1.(1)求以$(2,-1)$為圓心，半徑為 3 的圓方程式。　答:(1)$(x-2)^2+(y+1)^2=9$

(2)求圓 C：$(x-5)^2+(y-2)^2=16$ 的圓心與半徑。

答:(2)圓心為(5,2)，半徑為 4　(3)$(x-3)^2+(y+2)^2=13$

(3)求以$(3,-2)$為圓心且通過原點的圓方程式。

例 4:(圓一般式化為標準式)

(1)求圓 C：$x^2+y^2-2x+4y-6=0$ 的圓心與半徑。

(2)求圓 $2x^2+2y^2+2x-4y+2=0$ 的圓心與半徑。

解:(1)利用配方法，將 $x^2+y^2-2x+4y-6=0$ 配方，得$(x^2-2x)+(y^2+4y)=6$

整理得$(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)=6+1+4$

即$(x-1)^2+(y+2)^2=11$

故圓 C 的圓心坐標為$(1,-2)$，半徑為$\sqrt{11}$

(2)將 $2x^2+2y^2+8x-4y+2=0$ 兩邊同除以 2

得 $x^2+y^2+4x-2y+1=0$，以下同(1)題

Ex1.(1)求圓 $C:x^2+y^2+4x-6y-12=0$ 的圓心與半徑。　答:圓心為$(-2,3)$，半徑為 5

(2)求圓 $2x^2+2y^2-8x-12y+11=0$ 的圓心與半徑。　答:圓心為$(2,3)$，半徑為 $\frac{\sqrt{30}}{2}$

例 5:(圓與直線的關係)

討論圓 $C:(x-2)^2+(y+3)^2=4$與下列各直線的關係：

(1)$L_1:2x-y=0$　(2)$L_2:4x-3y-8=0$

(3)$L_3:3x+4y-4=0$。

解: d =圓心到直線距離，若d < r為交於兩點(相割)

d = r為焦於一點(相切)，d > r為無交點(相離)

圓心坐標$(2,-3)$，半徑 r 為 2

(1)因為 $d_1=\frac{|2\times2-(-3)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{7}{\sqrt5}>2$

所以 $L_1:2x-y=0$ 與圓 C 相離

(2)因為 $d_2=\frac{|4\times2-3\times(-3)-8|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{9}{5}<2$

所以 $L_2:4x-3y-8=0$ 與圓 C 相割

(3)因為 $d_3=\frac{|3\times2+4\times(-3)-4|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$

所以 $L_3:3x+4y-4=0$ 與圓 C 相切

Ex1.討論圓 $C:(x+2)^2+(y-3)^2=16$ 與下列各直線的關係：　答:(1)相割;(2)相切;(3)相離

(1)$L_1:3x+4y-1=0$　(2)$L_2:3x-4y-2=0$

(3)$L_3:4x-3y-13=0$。

例 6:(過圓上一點求切線)

求過點 $P(2,3)$且與圓 $C:x^2+y^2=13$ 相切的直線方程式。

解: $\boldsymbol{x^2+y^2=r^2\rightarrow x_0x+y_0y=r}$

過圓 $C:x^2+y^2=13$ 上一點 $P(2,3)$的切線方程式為 $2\times x+3\times y=13$

整理上式得切線為 $L:2x+3y-13=0$

Ex1.求過點 $P(2,1)$且與圓 $C:x^2+y^2=5$ 相切的直線方程式。　答:$2x+y-5=0$

例 7:(求切線段長)

求點 $P(1,-2)$到圓 $C:(x-1)^2+(y-1)^2=4$ 的切線段長。

解:.點 $P(1,-2)$到圓 $C:(x-1)^2+(y-1)^2=4$ 的

切線段長為 $\sqrt{(1-1)^2+(-2-1)^2-4}=\sqrt5$

Ex1.求點 $P(-3,1)$到圓 $C:(x+2)^2+(y+2)^2=1$ 的切線段長。　答:3

例 8:逐項展開下列各級數：

$$\sum_{k=1}^{3}(3k-1)=(3\times1-1)+(3\times2-1)+(3\times3-1)=2+5+8=15$$

$$\sum_{k=3}^{8}(-2)=\underbrace{(-2)+(-2)+(-2)+(-2)+(-2)+(-2)}_{6個-2}=-12$$

Ex1.逐項展開下列各級數：　答:(1)24;(2)42

(1)$\sum_{k=1}^{4}(2k+1)=$

(2)$\sum_{k=5}^{10}7=$

例9:設一等差數列的首項為 -5，第4項為31，求此數列的公差。

解:$a_4=a_1+(4-1)d$

得知 $31=-5+3d$　　整理得 $d=12$

Ex1.設一等差數列的首項為 23，第 6 項為 58，求此數列的公差。　答:7

例10:求在200到500之間，所有5的倍數之和。

解: $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\times n$

在200到500之間，5的倍數依序列出有200，205，……，500

此數列首項為 200，末項為 500

共有 61 項的等差數列得所欲求之和為

$$S_{61}=\frac{61(200+500)}{2}=21350$$

Ex1.求在 50 到 200 之間，所有 3 的倍數之和。

答:6225

例11:(1)已知一等比數列的首項為 -2，公比為 $\frac{1}{2}$，求此數列的第 4 項。

(2)設一等比數列的第3項為 -8，第5項為 -32，求此數列的公比。

解:(1)由公式 $a_4=a_1\times r^3$

得知 $a_4=(-2)\times(\frac{1}{2})^{4-1}=-2\times(\frac{1}{2})^3=-2\times\frac{1}{8}=-\frac{1}{4}$

故此數列的第 4 項為 $-\frac{1}{4}$

(2)由公式 $a_5=a_3\times r^2$

得 $-32=-8\times r^2$，$r^2=4$　故得 $r=\pm 2$

Ex1.(1)一等比數列的首項為 -1，公比為 3，求此數列的第 5 項。　答:-81

(2)設一等比數列的第 2 項為 6，第 4 項為 24，試求此數列的公比。　答:± 2

例 12:一等比數列的首項為 8，公比為 $\frac{1}{2}$，求前 6 項的和。

解:由公式 $S_n=\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

得 $S_6=\frac{8[1-(\frac{1}{2})^6]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{8\times(1-\frac{1}{64})}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{63}{8}}{\frac{1}{2}}=\frac{63}{4}$

Ex1.已知一等比數列的首項為 4，公比為 3，試求前 4 項的和。　答:160

例 13: (1)求 -6 與 12 的等差中項。

(2)求 15 與 60 的等比中項。

解:(1) -6 與 12 的等差中項為 $\frac{-6+12}{2}=3$

(2)15 與 60 的等比中項為

$\pm\sqrt{15\times 60}=\pm\sqrt{15\times 15\times 2\times 2}=\pm(15\times 2)=\pm 30$

Ex1.(1)求 -3 與 11 的等差中項。　答:4

(2)求 12 與 75 的等比中項。　答:± 30