

工三暑假作業 第三冊

第一章 數列與級數:

(1)等差數列: $a_{10} = a_3 + 7d$

(2)等差級數: $S_7 = \sum_{k=1}^7 a_k = a_1 + a_2 + a_3 +$

$$\dots + a_7 = \frac{a_1 + a_7}{2} \times \text{項數}$$

(3)等比數列: $a_{10} = a_3 \times r^7$

(4)等比級數: $S_7 = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_7 =$

$$\frac{a_8 - a_1}{r - 1}$$

(5)等差中項與等比中項:

若 a 、 b 、 c 成等差數列 $\Leftrightarrow b + b = a + c$

若 a 、 b 、 c 成等比數列 $\Leftrightarrow b \times b = a \times c$

練習題:

1. 設 7、13、19、25、……、 a_n 是一等差數列，
則其第 11 項為? 答:67

2. 某一等差數列的第 4 項為 7，第 10 項為 31，則
第 12 項為? 答:39

3. 求等差級數 $1+3+5+\dots+45=?$ 答:529

4. $\sum_{k=2}^{21} (3k-4) = ?$ 答:610

5. 於 2 與 20 之間插入五個數，使成等差數列，
則此插入五數中第四個數為? 答:14

6. 設一數列前 n 項的和 $S_n = n^2 - 2n$ ，求此數列的
第 8 項為? 答:13

7. 一等比數列，第 2 項為 20，第 5 項為 160，則
其公比為? 答:2

8. 等比數列第 5 項為 3，第 9 項為 6，則第 25
項為? 答:96

9. 若 a 、 b 、3、 c 、 d 五個數成等比數列，則 $abcd$
之值為何? 答:81

10. 50 與 72 的(1)等差中項為? ; (2)等比中項為?
答:(1) 61;(2) ± 60

第二章 指數與對數及其運算

1. 指數律:

(1) $2^3 \times 2^4 = \underline{\hspace{2cm}}$, $2^3 \div 2^4 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) $(2 \times 3)^4 = \underline{\hspace{2cm}}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3) $(2^3)^4 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(4) $2^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$, $2^{-3} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(5) $3^{\frac{1}{2}} = \underline{\hspace{2cm}}$, $2^{\frac{4}{3}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(6) $2^a > 2^b \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}}$,

$\left(\frac{1}{2}\right)^a > \left(\frac{1}{2}\right)^b \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}}$,

2. 對數律: $\log_a b$ 有意義 \Leftrightarrow

(1) $2^3 = 8 \Leftrightarrow \log_2 8 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) $2^{\log_2 3} = \underline{\hspace{2cm}}$, $\log_2 2^3 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3) $\log_{10} 2 + \log_{10} 3 = \underline{\hspace{2cm}}$,

$\log_{10} 2 - \log_{10} 3 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(4) $\log_{2a} 3^b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(5)(換

底公式) $\log_2 3 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

取 $c=1$ 可得 $\log_2 3 \times \log_3 2 = 1$

(6) $\log_2 a > \log_2 b \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}}$,

$\log_{\frac{1}{2}} a > \log_{\frac{1}{2}} b \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 對數的應用

(1) **首數**: 必須為整數 , **尾數**: 必須 0~1 之間

(2) 若 A 介於 1~10 之間, 則 **logA** 介於 0~1 之間

(3) $\log 12345 = \log 1234.5 + 1 = \log 123.45 + 2$

$= \log 12.345 + 3 = \log 1.2345 + 4$

以上四者何者符合 **尾數+首數** 的規定?

答:

1. 化簡 $\left(\frac{1}{27}\right)^{-2} \times \left(\frac{1}{9}\right)^3 \times 81^{\frac{1}{4}} = ?$ 答: 3

2. 若 $a=2^3$, $b=2^5$, $c=2^0$, 則 a 、 b 、 c 之大小順序為? 答: $a < c < b$

3. $\log_5 4 - \log_5 10 - \log_5 50 = ?$ 答: -3

4. 求 $\log_4 8 = ?$ 答: $\frac{3}{2}$

5. $\log 2 = a$, $\log 3 = b$, 則 $\log 18 = ?$ 答: $a + 2b$

6. 設 $a = \log_{\frac{1}{3}} 4$, $b = \log_{\frac{1}{3}} 5$, $c = \log_{\frac{1}{3}} 8$, 則 a 、 b 、 c 的大小關係為? 答: $a > b > c$

7. 設 $\log x = -4.6819$, 則(1) $\log x$ 之首數 = ?

(2) $\log x$ 之尾數 = ? 答: (1)-5 (2)0.3181

8. 若 $\log 7 = 0.8451$, 則 7^{10} 為幾位數? 答: 9

第三章 排列組合

- 1.(加法原理) 完成一件事情**僅需一個步驟**，其完成的方法數=各類別的方法數相加
- 2.(乘法原理) 完成一件事情**需一個步驟以上**，其完成的方法數=各步驟的方法數相乘
- 3.(直線排列) P_5^5 :5 件不同物中，選全部 5 件排成一列的方法數= $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$
 P_3^5 :5 件不同物中，選其中 3 件排成一列的方法數= $5 \times 4 \times 3$
- 4.(環狀排列) (1) 5 人圍成一圈的方法數=(5 人排成一列的方法數) \div (人數 5)
(2) 5 人之中選出 3 人圍成一圈的方法數=(5 人之中選出 3 人排成一列的方法數) \div (人數 3)
- 5.(相同物排列) aabbbc 這 6 個字母的直線排列數為 $(6!) \div (2! \times 3!)$
- 6.(重複排列) 由乘法原理來想(用會消耗性的去選不會消耗性的)
- 7.(組合) (1) C_3^5 :5 件不同物中，選出 3 件的方法數(這 3 件不用排順序) = $P_3^5 \div 3!$
= $(5 \times 4 \times 3) \div (3 \times 2 \times 1)$
(2) $C_3^5 = C_2^5$, $C_9^{100} = C_3^{100}$, ...
- 8.(重複組合) $H_3^5 = C_5^{3+5-1}$
 H_3^5 :3 個人分 5 件相同物的方法數(任意分)
:從 3 類中選 5 件的方法數
:a + b + c = 5 有幾組非負整數解

9.(二項式定理)

$$(A + B)^{10} = C_0^{10}A^{10} + C_1^{10}A^9B^1 + \dots + C_{10}^{10}B^{10}$$
$$C_0^{10} + C_1^{10} + C_2^{10} + \dots + C_{10}^{10} = 2^{10}$$
$$C_0^{10} + C_2^{10} + \dots + C_{10}^{10} = C_1^{10} + C_3^{10} + \dots + C_9^{10}$$

$(A + B)^{10}$ 展開後的某一項可設為 $C_r^{10}A^{10-r}B^r$

練習題:

- 1.一飾品店中有 5 種不同款式的皮包，6 種不同花色的圍巾，今要在此飾品店中任意選購一個皮包及一條圍巾，共有多少種選購方法？

答:30 種

- 2.甲、乙、丙、...等七人排成一列，求下列各排列數：
答:(1)5040;(2)720 種;(3)1440 種

- (1)任意排法
(2)規定甲、乙、丙三人必須相鄰
(3)規定甲、乙、丙任二人均不得相鄰

- 3.將 a、b、b、c、c、c 六個字母排成一列，問有多少種不同的排法？
答:60 種

- 4.將三封不同的信任意投入四個相異的郵筒，有多少種不同的投法？
答:64 種

- 5.四對情侶手拉手圍成一個圓圈，有多少種不同的排法？
答:5040 種

6. 數學抽考，由 10 題中任意選做 6 題，共有多少種選做方法？
答:210 種

7. 5 個相同的玩具，任意分給 3 位兒童，問可能的分法有幾種？
答:21 種

- 8.求下列各值：
答:(1)1024 (2)512 (3)512

(1) $C_0^{10} + C_1^{10} + C_2^{10} + \dots + C_{10}^{10} =$
(2) $C_0^{10} + C_2^{10} + C_4^{10} + C_6^{10} + C_8^{10} + C_{10}^{10} =$
(3) $C_1^{10} + C_3^{10} + C_5^{10} + C_7^{10} + C_9^{10} =$

第四章 機率與統計

1.(排容原理)

設 集合 A:國文及格的人 B:數學及格的人

$$n(A) = \text{國文及格人數} \quad n(B) = \text{數學及格人數}$$

$$n(A \cup B) = \text{國文或數學及格人數}$$

$$n(A \cap B) = \text{國文及數學及格人數}$$

$$\text{則 } n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

2.(古典機率)

例:投擲一粒骰子, 求出現偶數點的機率。

樣本空間 S: 一件事情的所有情況之集合

$$\text{則 } S = \{\text{點數 } 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad n(S) = 6$$

令集合 A: 出現偶數點的事件

$$\text{則 } A = \{\text{點數 } 2, 4, 6\} \quad n(A) = 3$$

$$\text{出現偶數點的機率 } P(A) = 3/6$$

3.(條件機率)

在 A 條件下出現 B 之機率 $P(B|A)$

$$= n(A \cap B) / n(A) = P(A \cap B) / P(A)$$

4.(條件機率的乘法原理)

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$$

5.(互斥事件、獨立事件)

(1) 若 $A \cap B = \emptyset$, 稱 A、B 為互斥事件

(2) 若 $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, 稱 A、B 為獨立事件, 此時 $P(B|X) = P(B)$ (與 X 無關)

練習題:

1. 擲兩顆公正的骰子一次, 求:

(1) 出現點數和為 8 的機率

(2) 出現點數和小於 5 的機率

(3) 出現兩顆骰子點數相同的機率

$$\text{答: (1) } \frac{5}{36}; (2) \frac{1}{6}; (3) \frac{1}{6}$$

2. 自裝有 3 紅球、4 白球、5 黑球的袋中, 一次取出三球, 若每球被取到的機會均等, 求: (1) 所取三球均不同色的機率

(2) 所取三球均同色的機率

$$\text{答: (1) } \frac{3}{11}; (2) \frac{3}{44}$$

3. 一袋中有大小相同的紅球 5 個、白球 3 個, 設每球被取到的機會相等, 今由袋中每次取出一球, 取出後不放回, 連續兩次, 求依序取出白球、紅球的機率。

$$\text{答: } \frac{15}{56}$$

4. 擲兩顆公正骰子一次, 在點數和為 8 的條件下, 求兩顆骰子均出現偶數點的機率。答: $\frac{3}{5}$

5. 甲、乙二人射擊同一目標, 彼此互不影響, 甲的命中率為 $\frac{2}{5}$, 乙的命中率為 $\frac{1}{4}$, 今二人同時向目標射擊, 求恰有一人命中目標的機率。

$$\text{答: } \frac{9}{20}$$

6. 發行每張 100 元的公益彩券 20000 張, 其中特獎 1 張獎金 50 萬元, 頭獎 2 張獎金各 20 萬元, 貳獎 30 張獎金各 1 萬元, 求買彩券一張可得獎金的期望值。 答: 60 元

第四冊

第一章 圓

1.(圓標準式) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$

圓心: 半徑 $r =$

2.(圓與直線關係) $d =$ 圓心到直線距離

(1) $d < r$ 時, 直線與圓交於兩點(相割)

(2) $d = r$ 時, 直線與圓交於一點(相切)

(3) $d > r$ 時, 直線與圓無交點(相離)

3.(求圓切線方程式)

(1)過圓上一點 (x_0, y_0) 時, 圓方程式:

$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ 的切線為

$$(x_0 + 2)(x + 2) + (y_0 - 1)(y - 1) = 25$$

(2)過圓外一點 (x_0, y_0) 時, 先設切線斜率 m
點斜式→整理成標準式→用圓心到切線距離 $=r$
→整理成 m 的二次方程式, 解 m 。

4.(求圓切線段長) 圓方程式 $f(x, y) = 0$ 則

圓外一點 (x_0, y_0) 到圓的切線段長 $= \sqrt{f(x_0, y_0)}$

練習題:

1.求以點 $C(-2, 3)$ 為圓心, 半徑為 4 的圓方程式。
答: $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$

2.判別下列各二元二次方程式的圖形:

(1) $C_1: x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13 = 0$

(2) $C_2: 2x^2 + 2y^2 - 8x + 12y - 19 = 0$

(3) $C_3: x^2 + y^2 - 3x + 4y + 10 = 0$

3.求圓方程式 $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 9 = 0$ 的圓心及半徑。
答:(1)(4, -3); (2)4

4.討論圓 $C: x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ 與下列各直線的關係:

(1) $L_1: 3x + 4y - 17 = 0$

(2) $L_2: 3x + 4y + 8 = 0$

(3) $L_3: 3x + 4y + 18 = 0$

答:(1)恰有一交點;(2)交於相異兩點;(3)不相交

5.求過圓 $C: (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 8$ 上一點 $P(1, 2)$ 的切線方程式。
答: $x + y - 3 = 0$

6.求自點 $P(5, 3)$ 到圓 $C: (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 20$ 的切線段長。
答:5

7.設直線 $L: 3x - 4y + 1 = 0$ 與圓 $C: (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 10$ 相交於 A 、 B 兩點, 求弦 AB 的長。
答: $2\sqrt{6}$

第二章 二次曲線

1.(拋物線定義式) <到焦點距離=到準線距離>

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y)^2} = |x+2|$$

的焦點為_____ 準線為_____

2.(拋物線標準式) $(y-1)^2 = -8(x+3)$

頂點: _____ 開口朝_____ 正焦弦長= _____

3.(拋物線一般式)

(1)開口朝上下, $y = ax^2 + bx + c$

(2)開口朝左右, $x = ay^2 + by + c$

4.(橢圓定義式) <到兩焦點距離和為定值 $2a$ >

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y)^2} + \sqrt{(x+3)^2 + (y)^2} = 10$$

焦點為_____ 中心點 _____

長軸長 $2a =$ _____ 圖形:直立或橫向

5.(橢圓標準式) $\frac{(x+3)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$ 直立或橫向

中心點為_____ $a^2 =$ _____ $b^2 =$ _____ $c^2 =$ _____

長軸長 $2a =$ _____ 短軸長 $2b =$ _____ 正焦弦長= _____

6.(雙曲線定義式) <到兩焦點距離差為定值 $2a$ >

$$\left| \sqrt{(x-5)^2 + (y)^2} - \sqrt{(x+5)^2 + (y)^2} \right| = 6$$

焦點為_____ 中心點 _____

貫軸長 $2a =$ _____ 圖形:直立或橫向

7.(雙曲線標準式) $\frac{(x+3)^2}{25} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$

中心點為_____ $a^2 =$ _____ $b^2 =$ _____ $c^2 =$ _____

貫軸長 $2a =$ _____ 共軛軸長 $2b =$ _____

正焦弦長 $\frac{2b^2}{a} =$ _____

8.(雙曲線漸近線) $\frac{(x+3)^2}{a^2} - \frac{(y-1)^2}{b^2} = 1$

二條漸近線為 $b(x+3) \pm a(y-1) = 0$

9.(雙曲線漸近線式)

若二條漸近線為 $2x + 3y = 0$ 、 $2x - 3y = 0$

則可設雙曲線為 $(2x + 3y)(2x - 3y) = C$ (常數)

練習題:

1.設拋物線上的點 $P(x, y)$, 滿足

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = |x+2|, \quad \text{答: (1) } (2, 0); (2) x+2=0$$

求(1)焦點坐標 (2)準線方程式。

2.求拋物線標準式: $(x+1)^2 = -4(y-2)$ 的

(1)頂點_____ (2)開口朝_____

(3) $c =$ _____

答: (1) $(-1, 2)$; (2) 下; (3) -1 ;

5.求滿足 $\sqrt{(x-3)^2 + y^2} + \sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 10$ 的橢圓

之(1)焦點坐標_____

(2)長軸長 $2a =$ _____ (3)中心坐標_____

6.橢圓標準式: $\frac{(x+3)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$

(1)中心點_____ (2)圖形為直立或橫向_____

(3) $a^2 =$ _____ $b^2 =$ _____ $c^2 =$ _____

(4) $a =$ _____ $b =$ _____ $c =$ _____ 正焦弦長= _____

9.雙曲線標準式: $\frac{(x+3)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$

(1)中心點_____ (2)圖形為直立或橫向_____

(3) $a^2 =$ _____ $b^2 =$ _____ $c^2 =$ _____

(4) $a =$ _____ $b =$ _____ $c =$ _____ 正焦弦長= _____

第三章 微分

1. ($x \rightarrow a$ 的求極限值) 求 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 的極限值

(1) 當分母 $g(a) \neq 0$ 時，極限值為 $\frac{f(a)}{g(a)}$

(2) 當分母 $g(a) = 0$ 時，分子分母可約掉 $(x - a)$

2. (函數的連續) (1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在 \Leftrightarrow

右極限 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) =$ 左極限 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ 時

(2) 若 $y = f(x)$ 的圖形在 $x = a$ 處為連續 \Leftrightarrow

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)。$$

3. (函數的導數)

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

= 函數圖形在 $x = 2$ 處的切線斜率

4. (微分公式)

(1) 多項式: $(x^{10})' = 10x^9$ 。 $(3x^4)' = 12x^3$ 。

$$(7x)' = 7 \quad (9)' = 0。$$

(2) $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$

$$(3) \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$$

(4) $(f(g))' = f'(g) \times g'$

5. (微分應用) $y = f(x)$ 的圖形

(1) 解 $f'(x) = 0$ 可求得圖形極點的位置

(2) 解 $f'(x) > 0$ 可求得圖形遞增的區間

(3) 解 $f'(x) < 0$ 可求得圖形遞減的區間

(4) 解 $f''(x) = 0$ 可求得圖形反曲點的位置

(5) 解 $f''(x) > 0$ 可求得圖形向上凹的區間

(6) 解 $f''(x) < 0$ 可求得圖形向下凹的區間

練習題:

1. 求 $\lim_{x \rightarrow 3} (2x^3 - 3x^2 + x + 2)$ 。 答: 32

2. 設函數 $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ ，求 (1) $f(x)$ 在 $x = 1$ 的導函數及 (2) 導數。 答: (1) $4x + 3$; (2) 7

3. 已知點 $A(2, 4)$ 在函數 $f(x) = x^2$ 的圖形上，求過點 A 的切線方程式。 答: $4x - y - 4 = 0$

4. 討論 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ 的圖形之遞增及凹向。

(1) 由 $f'(x) = 0$ 可得 _____

解得 $x =$ _____。

由 $f''(x) = 0$ 可得 _____

解得 $x =$ _____。

(2) 求極點。 _____

求反曲點。 _____

(4) 遞增的區間為 _____。

(5) 凹向上的區間為 _____。

答: (1) $3x^2 - 6x = 0$; $0, 2$; $6x - 6 = 0$; 1

(2)(0,1)、(2,-3); (1,-1) (3)略

(4)($-\infty, 0$)(2, ∞) (5)(1, ∞)

第四章 積分

1. ($n \rightarrow \infty$ 的求極限值)

(1) 函數型: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ 的極限值，

由 n 的最高次的項來決定。

(2) 指數型: $r < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ 的

極限值，由(最大數字) n 的項來決定。

2. (無窮等比數列與級數的收斂)

(1) 當 $|r| < 1$ 或 $r = 1$ ，

數列 a, ar, ar^2, ar^3, \dots 收斂。

(2) 當 $|r| < 1$ ，級數 $a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$

收斂，且其和為 $\frac{a}{1-r}$ 。

3. (多項函數的積分)

(1) 不定積分: $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$ 。

$$\int 3x^4 dx = \frac{3x^5}{5} + c \quad \int 7x dx = \frac{7x^2}{2} + c$$

$$\int 8 dx = 8x + c$$

(2) 定積分: $\int_1^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{15}{4}$

4. (微積分基本定理)

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

練習題:

1. 求下列各極限: 答:(1)0;(2) $\frac{3}{4}$

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+4}{2n^2-3} \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2-1}{4n^2+7n}$$

2. 求下列各極限: 答:(1)0;(2)-1

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n+1}{3^n} \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n-5^n}{3^n+5^n}$$

3. 無窮等比級數 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots$ 的和為?
答: $\frac{2}{3}$

4. 求不定積分 $\int (3x^2 - 4x + 5) dx$ 。

答: $x^3 - 2x^2 + 5x + c$

5. 設 $f(x)$ 為多項式函數且 $\int_1^2 f(x) dx = 5$,

$\int_2^5 f(x) dx = 10$, 求下列之值。 答:(1)-5;(2)30

$$(1) \int_2^1 f(x) dx =$$

$$(2) \int_1^5 2f(x) dx =$$

6. 求定積分 $\int_{-1}^3 (-x+4) dx$ 。 答:12

7. 求函數 $f(x) = x^2 - 6x + 4$ 與 x 軸、 $x = 2$ 、 $x = 5$ 所圍成區域的面積。 答:12