家三暑假作業　第三冊 數學

例 1:(一元二次不等式)解一元二次不等式

(1) $x^2-2x-15>0$。

解:$(\mathbf{x}+\mathbf{3})(\mathbf{x}-\mathbf{5})=\mathbf{0}$的解為 $\mathbf{x}=-\mathbf{3}$、$\mathbf{5}$

$(\mathbf{x}+\mathbf{3})(\mathbf{x}-\mathbf{5})<\mathbf{0}$的解為 $\mathbf{x}=-\mathbf{3}$、$\mathbf{5}$之間

$(\mathbf{x}+\mathbf{3})(\mathbf{x}-\mathbf{5})>\mathbf{0}$的解為 $\mathbf{x}=-\mathbf{3}$、$\mathbf{5}$之外

本題可化為$(x+3)(x-5)>0$

$\therefore x>5$或$x<-3$

(2)解一元二次不等式 $2x^2-x-6<0$。

本題可化為$(2x-3)(x+2)<0$

其解為$x=-2$、$\frac{3}{2}$之間　　$\therefore\ -2<x<\frac{3}{2}$

(3)解一元二次不等式 $-x^2+4x-3<0$。

先$\times -1$，化為$x^2-4x+3>0$

再分解為$(x-1)(x-3)>0$

解為 $x=1$、3之外　$\therefore x>3$或$x<1$

Ex1.(1)解一元二次不等式 $x^2-2x-3\ge 0$。

答:$x\le -1$ 或 $x\ge 3$

(2)解一元二次不等式 $3x^2-4x+1\le 0$。

答:$\frac{1}{3}\le x\le 1$

(3)解一元二次不等式 $-x^2-4x+5>0$。

答:$-5<x<1$

Ex2.(1)解一元二次不等式 $x^2-3x-10>0$。

答:$x<-2$ 或 $x>5$

(2)解一元二次不等式 $2x^2+x-3<0$。

答:$-\frac{3}{2}<x<1$

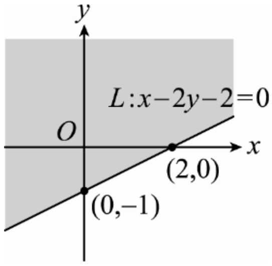
(3)解一元二次不等式 $-x^2+2x+3<0$。

答:$x<-1$ 或 $x>3$

例 2:(1)圖示不等式 $x-2y-2\le 0$ 的解。

解:作直線 L：$x-2y-2=0$

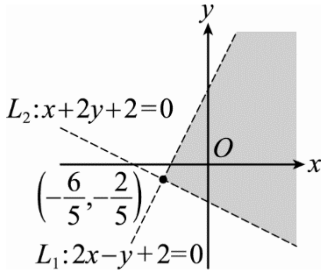
因為此不等式包含直線 L，所以直線 L 以實線畫出　則不等式 $x-2y-2\le 0$ 的圖形為直線 L 及直線 L 的左側半平面　　如圖所示**:**



(2)圖示聯立不等式$\begin{cases}2x-y+2>0\\x+2y+2>0\end{cases}$的解。

求出兩個圖解之共同部分　即為聯立不等式

$\begin{cases}2x-y+2>0\\x+2y+2>0\end{cases}$的圖解，如圖所示



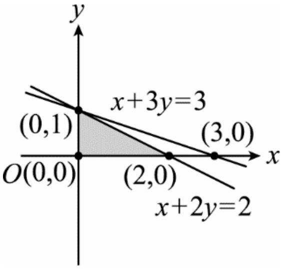
Ex1.圖示二元一次不等式 $3x-y-6\le 0$ 的解。

Ex2.圖示聯立不等式$\begin{cases}x-2y-2\le 0\\2x+y-1>0\end{cases}$的解。

例 2:在滿足聯立不等式$\begin{cases} x+2y\le 2 \\ x+3y\le 3 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$的條件下，求

$f(x,y)=x-y$ 的最大值。

解:求出斜線區域的頂點座標(有三個)，用這三個點帶入 $f(x,y)=x-y$ 來求最大或最小值



當 $f(0,0)=0$，$f(2,0)=2$，$f(0,1)=-1$

故當 $x=2$，$y=0$ 時，目標函數$f(x,y)=x-y$ 有最大值 2

Ex1.在滿足聯立不等式$\begin{cases} x-y\le 1 \\ x+2y\le 4 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$的條件下，求

$f(x,y)=2x+y$ 的最大值。　答:5

Ex2.在滿足聯立不等式$\begin{cases} 2x-3y\le 0 \\ x+y\ge 5 \\ x\ge 0 \end{cases}$ 的條件下，求

$f(x,y)=3x+2y$ 的最小值。　答:10

例 3:(圓方程式)

(1)求以$(-1,3)$為圓心，半徑為 2 的圓方程式。

(2)求圓 C：$(x+3)^2+(y-5)^2=8$ 的圓心與半徑。

(3)求以$(2,-3)$為圓心且通過$(-1,1)$的圓方程式。

解:圓的標準式$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$，

(1)圓之方程式為$(x+1)^2+(y-3)^2=4$

(2)由圓的標準式得知$r^2=8$，圓心為$(-3,5)$，半徑為 $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

(3)因為所求的圓通過$(-1,1)$

所以半徑為$(2,-3)$到$(-1,1)$的距離

即 $r=\sqrt{[2-(-1)]^2+(-3-1)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

利用圓的標準式可知

所求的圓方程式為$(x-2)^2+(y+3)^2=25$

Ex1.(1)求以$(2,-1)$為圓心，半徑為 3 的圓方程式。　答:(1)$(x-2)^2+(y+1)^2=9$

(2)求圓 C：$(x-5)^2+(y-2)^2=16$ 的圓心與半徑。

答:(2)圓心為(5,2)，半徑為 4　(3)$(x-3)^2+(y+2)^2=13$

(3)求以$(3,-2)$為圓心且通過原點的圓方程式。

例 4:(圓一般式化為標準式)

(1)求圓 C：$x^2+y^2-2x+4y-6=0$ 的圓心與半徑。

(2)求圓 $2x^2+2y^2+2x-4y+2=0$ 的圓心與半徑。

解:(1)利用配方法，將 $x^2+y^2-2x+4y-6=0$ 配方，得$(x^2-2x)+(y^2+4y)=6$

整理得$(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)=6+1+4$

即$(x-1)^2+(y+2)^2=11$

故圓 C 的圓心坐標為$(1,-2)$，半徑為$\sqrt{11}$

(2)將 $2x^2+2y^2+8x-4y+2=0$ 兩邊同除以 2

得 $x^2+y^2+4x-2y+1=0$，以下同(1)題

Ex1.(1)求圓 $C:x^2+y^2+4x-6y-12=0$ 的圓心與半徑。　　答:圓心為$(-2,3)$，半徑為 5

(2)求圓 $2x^2+2y^2-8x-12y+11=0$ 的圓心與半徑。　　答:圓心為$(2,3)$，半徑為 $\dfrac{\sqrt{30}}{2}$

例 5:(圓與直線的關係)

討論圓 $C:(x-2)^2+(y+3)^2=4$與下列各直線的關係：

(1)$L_1:2x-y=0$　(2)$L_2:4x-3y-8=0$

(3)$L_3:3x+4y-4=0$。

解: d =圓心到直線距離，若d < r為交於兩點(相割)

d = r為焦於一點(相切)，d > r為無交點(相離)

圓心坐標$(2,-3)$，半徑 r 為 2

(1)因為 $d_1=\dfrac{|2\times2-(-3)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{7}{\sqrt5}>2$

所以 $L_1:2x-y=0$ 與圓 C 相離

(2)因為 $d_2=\dfrac{|4\times2-3\times(-3)-8|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{9}{5}<2$

所以 $L_2:4x-3y-8=0$ 與圓 C 相割

(3)因為 $d_3=\dfrac{|3\times2+4\times(-3)-4|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$

所以 $L_3:3x+4y-4=0$ 與圓 C 相切

Ex1.討論圓 $C:(x+2)^2+(y-3)^2=16$ 與下列各直線的關係：　　答:(1)相割;(2)相切;(3)相離

(1)$L_1:3x+4y-1=0$　(2)$L_2:3x-4y-2=0$

(3)$L_3:4x-3y-13=0$。

例 6:(過圓上一點求切線)

求過點 $P(2,3)$且與圓 $C:x^2+y^2=13$ 相切的直線方程式。

解: $\boldsymbol{x^2+y^2=r^2\rightarrow x_0x+y_0y=r}$

過圓 $C:x^2+y^2=13$ 上一點 $P(2,3)$的切線方程式為 $2\times x+3\times y=13$

整理上式得切線為 $L:2x+3y-13=0$

Ex1.求過點 $P(2,1)$且與圓 $C:x^2+y^2=5$ 相切的直線方程式。　　答:$2x+y-5=0$

例 7:(求切線段長)

求點 $P(1,-2)$到圓 $C:(x-1)^2+(y-1)^2=4$ 的切線段長。

解:.點 $P(1,-2)$到圓 $C:(x-1)^2+(y-1)^2=4$ 的

切線段長為 $\sqrt{(1-1)^2+(-2-1)^2-4}=\sqrt5$

Ex1.求點 $P(-3,1)$到圓 $C:(x+2)^2+(y+2)^2=1$ 的切線段長。　　答:3

例 8:逐項展開下列各級數：

$$\sum_{k=1}^{3}(3k-1)=(3\times1-1)+(3\times2-1)+(3\times3-1)=2+5+8=15$$

$$\sum_{k=3}^{8}(-2)=\underbrace{(-2)+(-2)+(-2)+(-2)+(-2)+(-2)}_{6個-2}=-12$$

Ex1.逐項展開下列各級數：　　答:(1)24;(2)42

(1) $\sum_{k=1}^{4}(2k+1)=$

(2) $\sum_{k=5}^{10}7=$

例 9:設一等差數列的首項為 -5，第 4 項為 31，求此數列的公差。

解:$a_4=a_1+(4-1)d$

得知 $31=-5+3d$　　整理得 $d=12$

Ex1.設一等差數列的首項為 23，第 6 項為 58，求此數列的公差。　　答:7

例 10:求在 200 到 500 之間，所有 5 的倍數之和。

解: $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\times n$

在 200 到 500 之間，5 的倍數依序列出有 200，205，……，500

此數列首項為 200，末項為 500

共有 61 項的等差數列得所欲求之和為

$$S_{61}=\frac{61(200+500)}{2}=21350$$

Ex1.求在 50 到 200 之間，所有 3 的倍數之和。

答:6225

例 11:(1)已知一等比數列的首項為 -2，公比為 $\frac{1}{2}$，求此數列的第 4 項。

(2)設一等比數列的第 3 項為 -8，第 5 項為 -32，求此數列的公比。

解:(1)由公式$a_4=a_1\times r^3$

得知 $a_4=(-2)\times(\frac{1}{2})^{4-1}=-2\times(\frac{1}{2})^3=-2\times\frac{1}{8}=-\frac{1}{4}$

故此數列的第 4 項為 $-\frac{1}{4}$

(2)由公式$a_5=a_3\times r^2$

得 $-32=-8\times r^2$，$r^2=4$　故得 $r=\pm 2$

Ex1.(1)一等比數列的首項為 -1，公比為 3，求此數列的第 5 項。　答:-81

(2)設一等比數列的第 2 項為 6，第 4 項為 24，試求此數列的公比。　答:± 2

例 12:一等比數列的首項為 8，公比為 $\frac{1}{2}$，求前 6 項的和。

解:由公式 $S_n=\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

得 $S_6=\frac{8[1-(\frac{1}{2})^6]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{8\times(1-\frac{1}{64})}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{63}{8}}{\frac{1}{2}}=\frac{63}{4}$

Ex1.已知一等比數列的首項為 4，公比為 3，試求前 4 項的和。　答:160

例 13: (1)求 -6 與 12 的等差中項。

(2)求 15 與 60 的等比中項。

解:(1) -6 與 12 的等差中項為 $\frac{-6+12}{2}=3$

(2)15 與 60 的等比中項為

$\pm\sqrt{15\times 60}=\pm\sqrt{15\times 15\times 2\times 2}=\pm(15\times 2)=\pm 30$

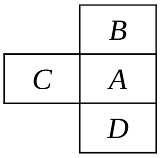
Ex1.(1)求 -3 與 11 的等差中項。　答:4

(2)求 12 與 75 的等比中項。　答:± 30

Ex1.某福利社內，有 4 種牛奶，6 種果汁，3 種汽水的飲品，小華要**買一瓶飲品**，問共有多少種不同的選法？　答:13 種

Ex2.某百貨公司辦年中慶，服裝店提供上衣 4 種，長褲 6 種，領帶 5 種，**各選 1 種**，可以享優惠，問共有幾種選擇方式？　答:120 種

Ex3.將下圖 A、B、C、D 四個區域，用 6 種不同的顏色染料塗上色彩，相鄰區域用不同顏色，顏色可重複使用，且每區只塗上一種顏色，試問塗法有多少種？　答:750 種



例 1:求 180 的正因數個數。

解:$\mathbf{2^a \times 3^b \times 5^c}$**的正因數有**$\mathbf{(a+1)(b+1)(c+1)}$**個**

將 180 質因數分解得 $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

由乘法原理知 180 的正因數

共有 $3 \times 3 \times 2 = 18$ 個

Ex1.求 48 的正因數個數。　答:10 個

Ex2.求 120 的正因數個數。　答:16 個

例 2:求下列各式之值：(1) P_4^6　(2) P_2^{50}。

解:(1) $P_4^6 = 6\times5\times4\times3 = 360$

(2) $P_2^{50} = 50\times49 = 2450$

Ex1.求下列各式之值：答:(1)210;(2)9900

(1) P_3^7

(2) P_2^{100}

例 3:求下列各式之值：

(1) C_3^9　(2) C_{20}^{21}　(3) C_0^{10}。

解:(1) $C_3^9 = \dfrac{9\times8\times7}{3\times2\times1} = 84$

(2) $C_{20}^{21} = C_1^{21} = 21$　　(3) $C_0^{10} = 1$

Ex1.求下列各式之值：　答:(1)36;(2)20;(3)1

(1) C_2^9

(2) C_{19}^{20}　　(3) C_0^5

例 4:(1)將 X、Y、Z、U、W、M、N 七個字母全取作直線排列，問不同的排法有多少種？

(2)由甲、乙、丙、丁、戊、己、庚等七人中，任選四人作直線排列，問排法有多少種？

解:(1) $P_7^7 = 7! = 7\times6\times5\times4\times3\times2\times1 = 5040$

(2) $P_4^7 = 7\times6\times5\times4 = 840$種

Ex1.(1)將 A、B、C、D、E 五個字母全取作直線排列，問不同的排法有多少種？　答:120 種

(2)由甲、乙、丙、丁、戊、己等六人中，任選三人作直線排列，問排法有多少種？　答:120 種

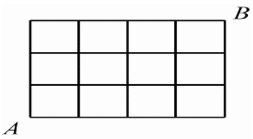
例 5:從 6 個人中選出 5 個人圍圓桌而坐，問共有多少種不同的坐法？

解:環狀排列數=$\dfrac{\textit{直線排列數}}{\textit{人數}}$

$\dfrac{P_5^6}{5} = \dfrac{6\times5\times4\times3\times2}{5} = 144$種

Ex1.從 7 個人中選出 4 個人圍圓桌而坐，問共有多少種不同的坐法？　答:210 種

例 6:如圖所示，有直街 5 條、橫街 4 條，由 A 取捷徑走到 B 有多少種走法？

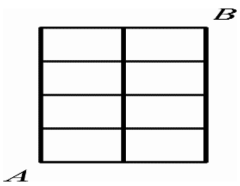


解: A 走到 B 需 4 次「右」及 3 次「上」

右右右右上上上 這 7 字的排列數為$\frac{7!}{4!3!}$

因此有$\frac{7!}{4!3!}=\frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{(4\times3\times2\times1)(3\times2\times1)}=35$種走法

Ex1.如圖所示，有直街 3 條、橫街 5 條，問由 A 取捷徑走到 B 有多少種走法？　答:15 種



例 7:將「*pineapple*」中的字母全取作直線排列，問排法共有多少種？

解:排列方法數有$\frac{9!}{3!\times2!\times1!\times1!\times1!\times1!}=30240$種

Ex1.將 banana 六個字母全取作直線排列，問不同的排法有多少種？ 答:60 種

例 8:容一甲有 20 位學生，欲從中選 3 位當幹部，問(1)任意選

(2)推舉的 3 位中必含班長

(3)推舉的 3 位中必不含班長

(4)推舉的 3 位中必含班長、不含副班長，各有多少種選法？

解:(1)即從 20 位中任選 3 位的組合數有

$$C_3^{20}=\frac{20\times19\times18}{3\times2\times1}=1140\text{種}$$

(2)推舉的 3 位中必含班長，即從 19 位中任選 2 位的組合數有

$$C_2^{19}=\frac{19\times18}{2\times1}=171\text{種}$$

(3)推舉的 3 位中必不含班長，即從 19 位中任選 3 位的組合數有

$$C_3^{19}=\frac{19\times18\times17}{3\times2\times1}=969\text{種}$$

(4)推舉的 3 位中必含班長不含副班長

即從 18 位中任選 2 位的組合數有

$$C_2^{18}=\frac{18\times17}{2\times1}=153\text{種}$$

Ex1.由 a、b、c、d、e、f 六本書中任選四本，試問　答:(1)15 種;(2)6 種;(3)1 種;(4)4 種

(1)任意選

(2)四本書中必含 a、b 兩本

(3)四本書中必不含 a、b 兩本

(4)四本書中必含 a 但不含 b，各有多少種選法？

例 9:投擲一顆公正的骰子，即各點出現的機會均等，求出現大於 4 的機率。

解: **S** =做一件試驗的所有情況之集合

$=\{1,2,3,4,5,6\}$

n(S) =做一件試驗的所有情況之總次數=6

令**A** =出現大於 4 的事件$=\{5,6\}$

n(A) =在集合 A 中所有情況之次數= 2

$$\mathrm{P(A)}=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{2}{6}$$

Ex1.投擲一顆公正骰子兩次，即各點出現的機會均等，求出現點數和為 8 的機率。 答: $\frac{5}{36}$

例 10:袋中有黑球 6 個，白球 4 個，自袋中任取兩球，若每球被取出的機會均等，求取出二黑球的機率。

解: n(S)＝做一件試驗的所有情況之總次數

＝從十球中任取兩球=$C_2^{10}=\frac{10\times 9}{2\times 1}=45$

令A＝取出二黑球的事件

n(A)＝集合 A 中之次數= $C_2^{6}=15$

$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$

Ex1.袋中有紅球 5 個，白球 3 個，自袋中任取兩球，若每球被取出的機會均等，求**兩球同色**的機率。 答: $\frac{13}{28}$

例 11:投擲一顆公正的骰子，若出現 1、3、5 點可得 10 元，出現 2、4、6 點可得 20 元，求擲一次所獲得金額之期望值。

解:期望值 E=(得 10 元)×(機率)+(得 20 元) ×(機率)

出現 1，3，5 點 ⇒ 機率為$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

出現 2，4，6 點 ⇒ 機率為$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

$E=\frac{1}{2}\times 10+\frac{1}{2}\times 20=15$（元）

Ex1.投擲一顆公正的骰子，若出現 1、2、3 點可獲得 1 元，出現 4、5 點可獲得 2 元，出現 6 點可獲得 3 元，試求擲一次所獲得分數之期望值。 答: $\frac{5}{3}$元

例 12:有五個選項的單選題，每題答對給 5 分，答錯則倒扣 2 分，試問此計分方式是否公平？

解:答對機率=$\frac{1}{5}$，答錯機率=$\frac{4}{5}$

$E=\frac{1}{5}\times 5-\frac{4}{5}\times 2=1-\frac{8}{5}=-0.6$

∴ 不公平（期望值要等於 0 才公平）

Ex1.有五個選項的單選題，每題答對給 8 分，問答錯應倒扣幾分才公平。 答:2 分

Ex2.發行每張 100 元的彩券 1,000 張，其中 1 張獎金 50,000 元，有 4 張獎金各 10,000 元，有 5 張獎金各 1,000 元，問購買此彩券是否有利？

答:不利

例 13:(算術平均數)

6 位學生的身高如下：

175、168、155、172、180、170

求其平均身高。

Ex1.五位學生的年齡如下： 答:16 歲

15、15、16、17、17 求其年齡平均數。

例 14:(1)七位學生的身高如下：
170、172、155、172、180、152、164
求其中位數。
(2)八位學生的身高如下：
164、152、183、170、172、180、172、155
求其中位數。

解:(1)將其身高由小至大排列如下
152、155、164、170、172、172、180 故中位數為第 4 項，即 $Me = 170$（公分）
(2)將其身高由小至大排列如下
152、155、164、170、172、172、180、183
故中位數為第 4 項和第 5 項的算術平均數
即 $Me = \dfrac{170+172}{2} = 171$（公分）

Ex1.(1)某球隊有 9 個球員，其體重分別為 75、68、64、85、79、66、81、83、77 公斤，求這些球員的體重中位數。　答:77 公斤
(2)某長青合唱團有 10 個團員，其年齡分別為 55、63、64、75、73、61、58、72、71、68 歲，求這些團員的年齡中位數。　答:66 歲

例 15:某地區 10000 位考生中，求成績第 550 名的考生之百分等級。
解:該生成績勝過的人數 $= 10000 - 550 = 9450$
得 $\dfrac{9450}{10000} \times 100\% = 94.5\%$　故得百分等級為 94

Ex1.全校 1500 位高二學生中，試求成績第 50 名的學生之百分等級。　答:96

例 16:已知 5 筆成績資料如下：60、70、80、90、100，求標準差。
解: 先求平均=80，將每一筆資料減去平均 80 可得$-20, -10, 0, 10, 20$，將這五個數值平方和÷5$= (400 + 100 + 0 + 100 + 400) \div 5$
$= 200 =$變異數，標準差$= \sqrt{\text{變異數}} = 10\sqrt{2}$

Ex1.已知 5 筆數值資料如下：2、3、4、5、6，求標準差。　答:$\sqrt{2}$

例 17:若某校 1000 位學生的數學段考成績平均分數是 65 分，標準差是 5 分，而且已知成績分布呈現常態分配。問
(1)全校約有多少人數學成績介於 55 分與 75 分之間？
(2)全校約有多少人數學成績低於 60 分？
(3)全校約有多少人數學成績高於 75 分？

解: $65 \pm \mathbf{5 = 60\text{~}70}$**分 佔**$\mathbf{68\%}$**人數**
$\mathbf{65 \pm 5 \times 2 = 55\text{~}75}$**分 佔**$\mathbf{95\%}$**的人數**
$\mathbf{65 \pm 5 \times 3 = 50\text{~}80}$**分 佔**$\mathbf{99.7\%}$**的人數**
$\mathbf{(1)}$ $\mathbf{95\% \times 1000 = 950}$ 人
$\mathbf{(2)}$ $(1\text{-}68\%) \div \mathbf{2 \times 1000 = 160}$ 人
$\mathbf{(3)}$ $\mathbf{(1 - 95\%)} \div \mathbf{2 \times 1000 = 25}$ 人

Ex1.若某校一年級男生有 500 人，其平均體重是 60 公斤，標準差是 10 公斤，且呈現常態分配。問
(1)此校一年級男生中約有多少人體重介於 50 公斤與 70 公斤之間？
(2)此校一年級男生中約有多少人體重低於 50 公斤？
(3)此校一年級男生中約有多少人體重高於 70 公斤？　答:(1)340 人;(2)80 人;(3)80 人