

第一章 排列組合

1.(加法原理) 完成一件事情**僅需一個步驟**，其完成的方法數=各類別的方法數相加

2.(乘法原理) 完成一件事情**需一個步驟以上**，其完成的方法數=各步驟的方法數相乘

3.(直線排列) P_5^5 :5 件不同物中，選全部 5 件排成一列的方法數= $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$

P_3^5 :5 件不同物中，選其中 3 件排成一列的方法數= $5 \times 4 \times 3$

4.(環狀排列) (1) 5 人圍成一圈的方法數=(5 人排成一列的方法數) \div (人數 5)

(2) 5 人之中選出 3 人圍成一圈的方法數=(5 人之中選出 3 人排成一列的方法數) \div (人數 3)

5.(相同物排列) aabbbc 這 6 個字母的直線排列數為 $(6!) \div (2! \times 3!)$

6.(重複排列) 由乘法原理來想(用會消耗性的去選不會消耗性的)

7.(組合) (1) C_3^5 :5 件不同物中，選出 3 件的方法數(這 3 件不用排順序) = $P_3^5 \div 3!$
= $(5 \times 4 \times 3) \div (3 \times 2 \times 1)$

(2) $C_3^5 = C_2^5, C_3^{100} = C_2^{100}, \dots$

8.(重複組合) $H_5^3 = C_5^{3+5-1}$

H_5^3 :3 個人分 5 件相同物的方法數(任意分)

:從 3 類中選 5 件的方法數

: $a + b + c = 5$ 有幾組非負整數解

9.(二項式定理)

$$(A + B)^{10} = C_0^{10}A^{10} + C_1^{10}A^9B^1 + \dots + C_{10}^{10}B^{10}$$

$$C_0^{10} + C_1^{10} + C_2^{10} + \dots + C_{10}^{10} = 2^{10}$$

$$C_0^{10} + C_2^{10} + \dots + C_{10}^{10} = C_1^{10} + C_3^{10} + \dots + C_9^{10}$$

$$(A + B)^{10} \text{展開後的某一項可設為 } C_r^{10}A^{10-r}B^r$$

練習題

Ex1.某飲料店供應 3 種果汁、4 種咖啡、3 種茶，曉華任意點購一種飲料，方法有多少種？

答:10 種

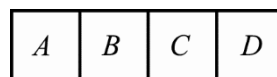
Ex2.一飾品店中有 5 種不同款式的皮包，6 種不同花色的圍巾，今要在此飾品店中任意選購一個皮包及一條圍巾，共有多少種選購方法？

答:30 種

Ex3.某汽車工廠有 4 種車身式樣，3 種不同的引擎，5 種色彩設計，問此工廠可裝配出多少種不同型的汽車？

答:60 種

Ex4.用 5 種不同顏色的色筆去塗下圖 A、B、C、D 四個區域，規定顏色可重複使用，但相鄰區域顏色不得相同，問塗法共有多少種？



答:320 種

Ex5.甲、乙、丙、...等七人排成一列，規定甲、乙、丙必須排前三位，問排法有多少種？

答:144 種

Ex6.甲、乙、丙、...等七人排成一列，求下列各排列數：

答:(1)5040;(2)720 種;(3)1440 種

(1)任意排法

(2)規定甲、乙、丙三人必須相鄰

(3)規定甲、乙、丙任二人均不得相鄰

Ex7.將 $a、b、b、c、c、c$ 六個字母排成一列，問有多少種不同的排法？ 答:60 種

Ex8.將三封不同的信任意投入四個相異的郵筒，有多少種不同的投法？ 答:64 種

Ex9.四對情侶手拉手圍成一個圓圈，有多少種不同的排法？ 答:5040 種

Ex10. 方程式 $x + y + z = 10$ ，
(1) 有多少組非負整數解？ 答:66 組
(1) 正整數解有幾組？ 答:36 組

Ex11. 5 個相同的玩具，任意分給 3 位兒童，問可能的分法有幾種？ 答:21 種

Ex12.求 $(3x^2 - \frac{1}{x})^8$ 展開後 x^4 項的係數。答:5670

第二章 機率

1.(排容原理)

設 集合 A:國文及格的人 B:數學及格的人
 $n(A)$ =國文及格人數 $n(B)$ =數學及格人數
 $n(A \cup B)$ =國文或數學及格人數
 $n(A \cap B)$ =國文及數學及格人數
則 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

2.(古典機率)

例: 投擲一粒骰子，求出現偶數點的機率。

樣本空間 S:一件事情的所有情況之集合

則 $S = \{\text{點數 } 1、2、3、4、5、6\}$ $n(S) = 6$

令集合 A=出現偶數點的事件

則 $A = \{\text{點數 } 2、4、6\}$ $n(A) = 3$

出現偶數點的機率 $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = 3/6$

3.(條件機率)

在 A 條件下出現 B 之機率 $P(B|A)$

$$= n(A \cap B) / n(A) = P(A \cap B) / P(A)$$

4.(條件機率的乘法原理)

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$$

5.(互斥事件、獨立事件)

(1) 若 $A \cap B = \emptyset$ ，稱 A、B 為互斥事件

(2) 若 $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ ，稱 A、B 為獨立事件，此時 $P(B|X) = P(B)$ (與 X 無關)

練習題:

Ex1.擲兩顆公正的骰子一次，求：

(1)出現點數和為 8 的機率

(2)出現點數和小於 5 的機率

(3)出現兩顆骰子點數相同的機率

$$\text{答:}(1)\frac{5}{36};(2)\frac{1}{6};(3)\frac{1}{6}$$

Ex2.自裝有 3 紅球、4 白球、5 黑球的袋中，一次取出三球，求：(1)所取三球均不同色的機率
(2)所取三球均同色的機率

$$\text{答:}(1)\frac{3}{11};(2)\frac{3}{44}$$

Ex3.同時擲兩顆公正骰子一次，若出現相同點數可獲得 1200 元，求其期望值。 答:200 元

Ex4.設袋中有 10 元硬幣 3 枚、5 元硬幣 2 枚，每枚硬幣被取到的機會相等，今自袋中任取 2 枚，求其幣值和的期望值。 答:16 元

Ex5.發行每張 100 元的公益彩券 20000 張，其中特獎 1 張獎金 50 萬元，頭獎 2 張獎金各 20 萬元，貳獎 30 張獎金各 1 萬元，求買彩券一張可得獎金的期望值。 答:60 元

第三章 統計

- 1.(抽樣方法) 簡單隨機抽樣、系統抽樣(等差)、分層隨機抽樣(按比例抽取)、部落抽樣(各小群體差異小)
- 2.(圖表) 次數分配表、直方圖、曲線圖、以下(上)累積次數分配表 <請參閱課本 P131~137>
- 3.(集中量數) 眾數、中位數、算術平均數 <請參閱課本 P145~147>
- 4.(差異量數) 全距、四分位距、母體標準差、樣本標準差 <請參閱課本 P156~160>
- 5.(百分等級 PR) 求考 80 分的 PR
將成績低於 80 的人數÷總人數=N%，則百分等級 PR= N(取整數部分)
- 6.(調整後的集中量數、差異量數)
 - (1) 集中量數隨著任何調整而改變
 - (2) 差異量數僅隨著倍數的調整而改變
- 7.(常態分配、信賴區間)
<請參閱課本 P165~169>

練習題

Ex1.某生第一次段考成績如下表所示，以每週上課時數為權數求其平均成績。 答:81 分

科目	每週上課時數	成績
國文	4	88
英文	3	76
數學	3	62
會計	6	85
經濟	4	86

Ex2.求下列各群數值的中位數：

(1)12、31、28、45、33、39、247、42、28

(2)63、44、3、64、126、52、47、56、60、

45

答:(1) 33 ; (2) 54

Ex3.融哲參加一項有 2000 人參加的電子遊戲競賽，排名為第 78 名，問融哲參加競賽成績的 PR 值。 答:96

Ex4.某生 8 次數學小考成績如下： 答: 5
82、93、80、86、77、90、81、83
求該生數學小考成績的母群體標準差。

Ex5.一組樣本資料數值如下：
10、8、15、7、9、8、11、12、5、11、14
求樣本變異數與樣本標準差。 答:9, 3

答:算術平均數為 72 分，而樣本標準差為 2 分

Ex6.某大學有學生 8000 人，其身高的分布接近常態分配，已知身高的算術平均數為 165 公分，標準差為 5 公分，依 68 - 95 - 99.7 規則，求該校學生 答:(1)6720 人；(2)7800 人
(1)身高 160 公分以上的大約有多少人？
(2)身高不足 175 公分的大約有多少人？

第四冊

第一章 三角函數的應用

1.(和差角公式)

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

2.(二倍角公式)

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2\alpha\end{aligned}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

3.(正弦定理) R: 為三角形外接圓半徑

$$(1) a:b:c = \sin A:\sin B:\sin C$$

$$(2) \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

4.(餘弦定理)

$$(1) a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \times \cos C$$

$$(2) \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

5.(Δ面積公式) 設 $s = \frac{1}{2} \times (\Delta \text{周長})$

(1) 已知兩邊長 a 、 b 及一夾角 θ 時，

$$\Delta \text{面積} = \frac{1}{2}ab \times \sin\theta$$

(2) 已知三邊長為 a 、 b 、 c 時，

$$\Delta \text{面積} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

(3) Δ面積與內切圓半徑 r 、外切圓半徑 R ，

$$\Delta \text{面積} = rs = \frac{abc}{4R}$$

6.(最大值與最小值)

$$(1) y = f(x) = a \times \sin x + b \times \cos x,$$

y 有最大值 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 、最小值 $-\sqrt{a^2 + b^2}$

$$(2) y = f(x) = a \sin x + b, \text{ 因 } -1 \leq \sin x \leq 1$$

用 $\sin x = 1$ 、 -1 代入，可得 y 的最大最小值

練習題

Ex1.(1) $\sin(\alpha + \beta) =$ _____

(2) $\sin(\alpha - \beta) =$ _____

(3) $\cos(\alpha + \beta) =$ _____

(4) $\cos(\alpha - \beta) =$ _____

(5) $\tan(\alpha + \beta) =$ _____

(6) $\tan(\alpha - \beta) =$ _____

(7) $\sin(2\theta) =$ _____

(8) $\cos(2\theta) =$ _____

(9) $\tan(2\theta) =$ _____

(10) $a \sin x + b \cos x$ 的最大值為 _____
最小值為 _____

Ex2. 設 α 、 β 均為銳角，若 $\tan\alpha = 2$ ， $\tan\beta = 3$ ，
求 $\tan(\alpha + \beta)$ 的值。 答: -1

Ex3. 設 $f(\theta) = 4\sin\theta - 3\cos\theta + 5$ ，求 $f(\theta)$ 的最大
值及最小值。 答: 最大值 10，最小值 0

Ex4. 設 $\triangle ABC$ 中， $\sin A = \frac{2}{3}$ ， $\overline{BC} = 8$ ，求 $\triangle ABC$
的外接圓半徑。 答: 6

Ex5. 已知 $\triangle ABC$ 中， $a=3$ ， $b=5$ ， $c=7$ ，
求 $\cos C$ 。 答： $\frac{-1}{2}$

Ex6. $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=5$ ， $\overline{BC}=8\sqrt{3}$ ， $\angle B=60^\circ$ ，
求 $\triangle ABC$ 的面積。 答：30 平方單位

Ex7. $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=13$ ， $\overline{BC}=14$ ， $\overline{CA}=15$ ，求
 $\triangle ABC$ 的面積。 答：84 平方單位

Ex8. 小偉在離塔基 120 公尺處，測得塔頂的仰
角為 30° ，求此塔的高度。 答： $40\sqrt{3}$ 公尺

Ex9. 小華在其家門口，觀測到附近一座摩天大
樓頂部的仰角為 60° ，已知該摩天大樓高 300
公尺，求大華的家與摩天大樓的直線距離。
答： $100\sqrt{3}$ 公尺

第二章 二次曲線

1.(圓標準式) $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$

圓心: 半徑 $r =$

2.(圓與直線關係) $d =$ 圓心到直線距離

(1) $d < r$ 時，直線與圓交於兩點(相割)

(2) $d = r$ 時，直線與圓交於一點(相切)

(3) $d > r$ 時，直線與圓無交點(相離)

3.(求圓切線方程式)

(1) 過圓上一點 (x_0, y_0) 時，圓方程式:

$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$ 的切線為

$(x_0+2)(x+2) + (y_0-1)(y-1) = 25$

(2) 過圓外一點 (x_0, y_0) 時，先設切線斜率 m
點斜式 \rightarrow 整理成標準式 \rightarrow 用圓心到切線距離 $=r$
 \rightarrow 整理成 m 的二次方程式，解 m 。

4.(求圓切線段長) 圓方程式 $f(x, y) = 0$ 則

圓外一點 (x_0, y_0) 到圓的切線段長 $=\sqrt{f(x_0, y_0)}$

5.(拋物線定義式) \langle 到焦點距離 $=$ 到準線距離 \rangle

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y)^2} = |x+2|$$

的焦點為_____ 準線為_____

6.(拋物線標準式) $(y-1)^2 = -8(x+3)$

頂點: 開口朝 正焦弦長 $=$

7.(拋物線一般式)

(1) 開口朝上下， $y = ax^2 + bx + c$

(2) 開口朝左右， $x = ay^2 + by + c$

8.(橢圓定義式) \langle 到兩焦點距離和為定值 $2a$ \rangle

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y)^2} + \sqrt{(x+3)^2 + (y)^2} = 10$$

焦點為_____ 長軸長 $2a =$ _____

9.(橢圓標準式) $\frac{(x+3)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$ 直立或橫向

中心點為 $a^2 =$ $b^2 =$ $c^2 =$

長軸長 $2a =$ 短軸長 $2b =$ 正焦弦長 $=$

10.(雙曲線定義式) \langle 到兩焦點距離差為定值 $2a$ \rangle

$$|\sqrt{(x-5)^2 + (y)^2} - \sqrt{(x+5)^2 + (y)^2}| = 6$$

焦點為_____ 貫軸長 $2a=$ _____

11.(雙曲線標準式) $\frac{(x+3)^2}{25} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$

中心點為_____ $a^2 =$ _____ $b^2 =$ _____ $c^2 =$ _____

貫軸長 $2a=$ _____ 共軛軸長 $2b=$ _____ 正焦弦長 $\frac{2b^2}{a} =$ _____

練習題

Ex1.求圓方程式 $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 9 = 0$ 的圓心及半徑。 答:(1)(4, -3); (2)4

Ex2.討論圓 $C: x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ 與下列各直線的關係： 答:(1)恰有一交點;(2)交於相異兩點;(3)不相交

(1) $L_1: 3x + 4y - 17 = 0$ (2) $L_2: 3x + 4y + 8 = 0$

(3) $L_3: 3x + 4y + 18 = 0$

Ex3.求過圓 $C: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 8$ 上一點 $P(1,2)$ 的切線方程式。 答: $x+y-3=0$

Ex4.求斜率為 3，且與圓 $C: x^2 + y^2 = 10$ 相切的直線方程式。 答: $3x-y+10=0, 3x-y-10=0$

第三章 微積分及其應用

1.(無窮等比數列與級數的收斂)

(1)當 $|r| < 1$ 或 $r = 1$ ，數列

a, ar, ar^2, ar^3, \dots 收斂。

(2)當 $|r| < 1$ ，級數 $a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$

收斂，且其和為 $\frac{a}{1-r}$ 。

4.(函數的連續)

(1)右極限 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ = 左極限 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ 時，

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在

(2) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ 時， $y = f(x)$

的圖形在 $x = a$ 處連續。

5.(函數的導數)

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

=圖形在 $x = 2$ 處的切線斜率

6.(微分公式)

(1) 多項式: $(x^{10})' = 10x^9$ 。 $(3x^4)' = 12x^3$ 。

$(7x)' = 7$ 。 $(9)' = 0$ 。

(2) $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$

(3) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$

(4) $(f(g))' = f'(g) \times g'$

7.(微分應用) $y = f(x)$ 的圖形

(1) 解 $f'(x) = 0$ 可求得圖形極點的位置

(2) 解 $f'(x) > 0$ 可求得圖形遞增的區間

(3) 解 $f'(x) < 0$ 可求得圖形遞減的區間

(4) 解 $f''(x) = 0$ 可求得圖形反曲點的位置

(5) 解 $f''(x) > 0$ 可求得圖形向上凹的區間

(6) 解 $f''(x) < 0$ 可求得圖形向下凹的區間

8.(多項函數的積分)

(1) 不定積分: $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$ 。

$$\int 3x^4 dx = \frac{3x^5}{5} + c \quad \int 8dx = 8x + c$$

(2) 定積分: $\int_1^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{15}{4}$

9. (微積分基本定理)

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

練習題

Ex1. 設函數 $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$, 求(1) $f(x)$ 在 $x = 1$ 的導函數及(2)導數。 答:(1) $4x + 3$; (2)7

Ex2. 求 $f(x) = 2x^4 + 3x^2 - 4x + 5$ 的導函數。 答: $8x^3 + 6x - 4$

Ex3. 求 $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ 的導函數。 答: $-\frac{7}{(x-3)^2}$

Ex4. 設函數 $F(x) = (2x^2 + 1)^3$, 求 $F'(x)$ 。

答: $12x(2x^2 + 1)^2$

Ex5. 設 $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x + 2$, 求其第二階導函數及 $f''(-1)$ 的值。 答: $12x + 8, -4$

Ex6. 描繪 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ 的圖形及討論遞增、凹向。

(1) 由 $f'(x) = 0$ 可得 _____

解得 $x =$ _____。

由 $f''(x) = 0$ 可得 _____

解得 $x =$ _____。

(2) 求極點。 _____

求反曲點。 _____

(3) 作圖:

(4) 遞增的區間為 _____。

(5) 凹向上的區間為 _____。

答:(1) $3x^2 - 6x = 0$; $0, 2$; $6x - 6 = 0$; 1

(2) $(0, 1)$ 、 $(2, -3)$; $(1, -1)$ (3)略

(4) $(-\infty, 0)$ 、 $(2, \infty)$ (5) $(1, \infty)$

Ex7. 求不定積分 $\int (3x^2 - 4x + 5) dx$ 。 答: $x^3 - 2x^2 + 5x + c$

Ex8. 求定積分 $\int_{-1}^3 (-x+4) dx$ 。 答: 12