

例 1: 在坐標平面上描出下列各點:

$A(3, 2)$ 、 $B(2, -3)$ 、 $C(-1, -2)$ 、 $D(0, 5)$ 、 $E(-4, 4)$ 、 $F(2, 0)$ 。

例 2:(點到點距離) 設平面上兩點 $P(1, 3)$ 、 $Q(9, 9)$ ，求 P 、 Q 兩點的距離。

解: $\sqrt{(x \text{ 相差})^2 + (y \text{ 相差})^2}$

利用平面上兩點的距離公式

$$\overline{PQ} = \sqrt{(9-1)^2 + (9-3)^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$$

Ex1. 設平面上兩點 $P(5, 2)$ 、 $Q(8, 6)$ ，求 P 、 Q 兩點的距離。 答: 5

Ex2. 設平面上兩點 $P(-5, 3)$ 、 $Q(0, 15)$ ，求 P 、 Q 兩點的距離。 答: 13

例 3:(中點公式) 設坐標平面上相異兩點 $P(-1, 2)$ 、 $Q(3, 6)$ ，求 \overline{PQ} 的中點坐標。

解: 中點 = $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$

用中點坐標公式得 $x = \frac{-1+3}{2} = 1$ ， $y = \frac{2+6}{2} = 4$

故 \overline{PQ} 的中點坐標為 $(1, 4)$

Ex1. 設坐標平面上相異兩點 $P(-2, 3)$ 、 $Q(4, 5)$ ，求 \overline{PQ} 的中點坐標。 答: $(1, 4)$

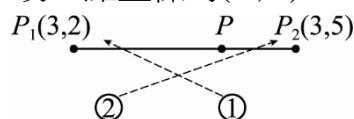
Ex2. 求平面上兩點 $P(2, -4)$ 、 $Q(8, 0)$ 的中點坐標。 答: $(5, -2)$

例 4:(分點公式) 設 $P_1(3, 2)$ 、 $P_2(3, 5)$ 、 $P(x, y)$ 為同一直線上相異三點，若 P 在線段 $\overline{P_1P_2}$ 上，且 $\overline{P_1P} : \overline{PP_2} = 2:1$ ，求 P 點坐標。

解: 因為 $\overline{P_1P} : \overline{PP_2} = 2:1$ 利用分點坐標公式得

$$x = \frac{1 \times 3 + 2 \times 3}{2+1} = 3 \quad y = \frac{1 \times 2 + 2 \times 5}{2+1} = 4$$

故 P 點坐標為 $(3, 4)$



Ex1. 設 $P_1(1, 2)$ 、 $P_2(5, 6)$ 、 $P(x, y)$ 為同一直線上相異三點，若 P 在線段 $\overline{P_1P_2}$ 上，且 $\overline{P_1P} : \overline{PP_2} = 1:3$ ，求 P 點坐標。 答: $(2, 3)$

Ex2. 設 $P_1(1, 0)$ 、 $P_2(-5, 3)$ 、 $P(x, y)$ 為同一直線上相異三點，若 P 在線段 $\overline{P_1P_2}$ 上，且 $\overline{P_1P} : \overline{PP_2} = 2:1$ ，求 P 點坐標。 答: $(-3, 2)$

例 5:(過兩點的直線斜率)求經過下列各點的直線之斜率：

- (1)(1, 6)與(-1, 2)。
- (2)(5, 1)與(-2, 1)。
- (3)(-3, 1)與(-3, -1)。

解：斜率 $m = \frac{y \text{相減}}{x \text{相減}}$

$$(1) \text{斜率 } m = \frac{6-2}{1-(-1)} = \frac{4}{2} = 2$$

$$(2) \text{斜率 } m = \frac{1-1}{5-(-2)} = \frac{0}{7} = 0$$

(3)因為 $x_1 = x_2 = -3$ ，所以斜率 m 不存在，此直線垂直於 x 軸

Ex1.求經過下列各點的直線之斜率：

- (1)(6, -3)與(-2, 5)。
- (2)(8, -2)與(4, -2)。
- (3)(3, -5)與(3, 2)。 答:(1)-1;(2)0;(3)不存在

Ex2.求經過下列各點的直線之斜率：

- (1)(5, 2)與(-2, -3)。
- (2)(-1, 0)與(4, 0)。
- (3)(-4, 5)與(-4, 2)。 答:(1) $\frac{5}{7}$;(2)0;(3)不存在

例 6:(過兩點的直線斜率)求下列各直線的斜率：

- (1)直線 $2x + 3y + 6 = 0$ 。
- (2)直線 $x - 2y + 3 = 0$ 。
- (3)直線 $2y - 1 = 0$ 。
- (4)直線 $x + 2 = 0$ 。

解：斜率 $m = -\frac{x \text{係數}}{y \text{係數}}$

- (1)直線 $2x + 3y + 6 = 0$ 的斜率為 $-\frac{2}{3}$
- (2)直線 $x - 2y + 3 = 0$ 的斜率為 $\frac{1}{2}$
- (3)直線 $2y - 1 = 0$ 的斜率為 0
- (4)直線 $x + 2 = 0$ 的斜率不存在

Ex1.求下列各直線的斜率：

- (1)直線 $3x + 2y + 6 = 0$ 。
- (2)直線 $2x - y + 4 = 0$ 。
- (3)直線 $3y + 2 = 0$ 。
- (4)直線 $2x - 1 = 0$ 。 答:(1) $-\frac{3}{2}$;(2)2;(3)0;(4)不存在

Ex2.求下列各直線的斜率：

- (1)直線 $x - 2y - 3 = 0$ 。
- (2)直線 $5x + y + 2 = 0$ 。
- (3)直線 $y = 2$ 。
- (4)直線 $x + 5 = 0$ 。 答:(1) $\frac{1}{2}$;(2)-5;(3)0;(4)不存在

例 7:(點斜式)求滿足過點(2, -1)且斜率為 3 的直線方程式。

解：點斜式 $y - y_0 = m(x - x_0)$

利用點斜式得直線方程式 $y - (-1) = 3(x - 2)$

化簡得 $3x - y - 7 = 0$

Ex1.試求滿足過點(-5, 3)且斜率為 2 的直線方程式。 答: $2x - y + 13 = 0$

Ex2.試求滿足過點(3, -2)且斜率為 0 的直線方程式。 答: $y + 2 = 0$

例 8:(斜截式)求滿足斜率為 3, y 截距為 2 的直線方程式。

解: 斜截式 $y = mx + b$

利用斜截式得 $y = 3x + 2$

Ex1.求滿足斜率為 2, y 截距為 -5 的直線方程式。 答: $y = 2x - 5$

Ex2.求滿足斜率為 -1, y 截距為 3 的直線方程式。 答: $y = -x + 3$

例 9:(點到直線距離)求點(3, -2)到直線 $L: 4x + 3y + 4 = 0$ 的距離。

解: $d = \frac{|\text{點代入}|}{\sqrt{(x \text{ 係數})^2 + (y \text{ 係數})^2}}$

點(3, -2)到直線 $L: 4x + 3y + 4 = 0$ 的

$$\text{距離 } d = \frac{|4 \times 3 + 3 \times (-2) + 4|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

Ex1.求點(-2, 3)到直線 $L: 3x - 4y = 2$ 的距離。
答:4

Ex2.求點(5, -8)到直線 $L: x - 4 = 0$ 的距離。
答:1

例 10:(餘式定理) 求 $2x^4 + x^3 - 2x^2 + 3$ 除以 $x - 1$ 的餘式。

解: $f(x) \div (x - 1)$ 的餘式 = $f(1)$

$$\text{令 } f(x) = 2x^4 + x^3 - 2x^2 + 3$$

利用餘式定理

$$\text{得餘式為 } f(1) = 2(1)^4 + 1^3 - 2(1)^2 + 3 = 4$$

Ex1.求 $x^{99} + 99$ 除以 $x + 1$ 的餘式。 答:98

Ex2.求 $(x + 3)^{10} + x$ 除以 $x + 2$ 的餘式。 答:-1

例 11:(因式定理)已知 $(x + 1)$ 為 $f(x) = x^4 - 3x^2 + kx - 1$ 的因式, 求 k 之值。

解: $(x + 1)$ 為 $f(x)$ 的因式 $\Leftrightarrow f(-1) = 0$

$$f(-1) = (-1)^4 - 3(-1)^2 + k(-1) - 1 = 0$$

$$\text{得 } k = -3$$

Ex1.已知 $(x + 2)$ 為 $f(x) = x^3 + kx + 12$ 的因式, 求 k 之值。 答: $k = 2$

Ex2.已知 $(x - 2)$ 為 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + k$ 的因式, 求 k 之值。 答: $k = -4$

例 12: k 為實數, 若方程式 $x^2 + 2x - k = 0$ 有兩相等實數解, 求 k 值。

解: 當 $b^2 - 4ac > 0$ 時, 有兩相異實根

當 $b^2 - 4ac = 0$ 時, 有重根

當 $b^2 - 4ac < 0$ 時, 無實根

$$\therefore \text{判別式 } b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times (-k) = 0$$

$$\Rightarrow 4 + 4k = 0 \quad \text{故 } k = -1$$

Ex1. k 為實數, 若方程式 $x^2 - 6x + k = 0$ 有兩相等實數解, 求 k 值。 答: $k = 9$

例 13:(根與係數)若 α, β 為方程式 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 的兩根, 求下列各式的值:

$$(1) \alpha + \beta \quad (2) \alpha \times \beta \quad (3) \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$$

$$(4) \alpha^2 + \beta^2 \quad (5) \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} \circ$$

解:兩根之和 $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$ 兩根之積 $\alpha \times \beta = \frac{c}{a}$

其中 $a = 1$ $b = -2$ $c = -3$

$$(1) \alpha + \beta = 2$$

$$(2) \alpha \times \beta = -3$$

$$(3) \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = -\frac{2}{3}$$

$$(4) (\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$2^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2 \times (-3)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 10$$

$$(5) \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = -\frac{10}{3}$$

Ex1.若 α 、 β 為方程式 $x^2 + 3x + 1 = 0$ 的兩根，
求下列各式的值：

$$(1) \alpha + \beta \quad (2) \alpha \times \beta \quad (3) \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$$

$$(4) \alpha^2 + \beta^2 \circ \quad \text{答:}(1) - 3; (2) 1; (3) - 3; (4) 7$$

Ex2.若 α 、 β 為方程式 $x^2 + 5x + 2 = 0$ 的兩根，
求下列各式的值：

$$(1) \alpha + \beta \quad (2) \alpha \times \beta \quad (3) \alpha^2 + \beta^2$$

$$(4) \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} \circ \quad \text{答:}(1) - 5; (2) 2; (3) 21; (4) \frac{21}{2}$$