

109 年 四技二專

統一入學測驗

數學 (C)

一、試題分析

109 年統測數學 C 是一份有難度的試卷。這次完成整卷需要不少的計算量與觀念技巧，預估滿分人數與 108 年相差無幾！（註：108 年統測數學 C 僅有 17 位滿分，這是統測數學 C 的最低紀錄）這次的試題大多是中等或是偏難題，其中稍難的題目分布在試卷的後半段，而簡單或中等偏易的題目分布在前半段，這是恰當的安排。其他特色如下：

1. 情境試題：

108 數學新課綱強調生活素養，108 年已率先反應，109 年也是持續出現，而且題數也更多，如：第 4、5、9、12、14、19 與 24 題。

2. 圖形試題：

這次圖形題較以往豐富且多元，有統計的次數累積圖、橢圓的各元素、可行解區域、三角函數圖形的伸縮平移、人工智慧的分類坐標圖。這些不需繁瑣的計算，只要正確的觀念就可以解決，如：第 4、7、10、11、23、24 與 25 題。

3. 綜合試題：

偏重與不等式的搭配，如：第 16 題結合對數，第 22 題結合二項式定理。

4. 爭議試題：

百分等級 (PR 值) 通常用於討論大數據，第 4 題的資料數少卻要討論，不太適宜。

綜合上述，程度較佳的考生應可有效地拉開得分差距，但是其他容易因不懂題意而隨意猜答的中後段或後段考生，恐怕也會無法有效的鑑別，這些將會影響考生們對於準備數學的意願。由於 108、109 年的試卷水平相近，這或許代表 110 年也是如此，考生們宜及早適應，並調整練習的方向。

二、配分比例表

單元名稱	題數	單元名稱	題數
直線方程式	1	數列與級數	1
三角函數	2	指數與對數及其運算	2
三角函數的應用	2	排列組合	2
向量	1	機率與統計	2
式的運算	2	圓	1
聯立方程式	2	二次曲線	1
複數	1	微分	3
不等式及其應用	1	積分	1



109 學年度四技二專統一入學測驗

數學(C)

總	分

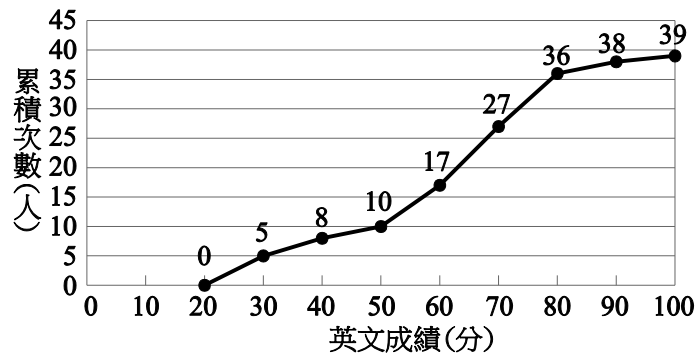
數學 C 參考公式

1. 三角函數的和差角公式： $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$
2. 若橢圓的長軸長為 $2a$ ，短軸長為 $2b$ ，則正焦弦長為 $\frac{2b^2}{a}$
3. 對數值： $\log_{10} 1.03 \approx 0.0128$ 、 $\log_{10} 1.3 \approx 0.1139$ 、 $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ 、 $\log_{10} 3 \approx 0.4771$
4. 複利公式：若 P 為本金、 r 為每期利率、 n 為期數，則 n 期後本利和 $= P(1+r)^n$
5. 若 α 、 β 為一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的兩根，則 $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$ 、 $\alpha\beta = \frac{c}{a}$
6. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ ， R 為 $\triangle ABC$ 外接圓的半徑
7. $\triangle ABC$ 的餘弦定理： $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

單選題 (每題 4 分，共 100 分)

- () 1. 關於下列各極限，何者錯誤？
- (A) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt[3]{x-2} = 0$ (B) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{x-2} = 0$ (C) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt[3]{x-2} = 0$
(D) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x-2} = 0$ 。
- () 2. 若 $a = \tan 480^\circ$ ， $b = \sec 135^\circ$ ， $c = \cos(-60^\circ)$ ，則下列有序數對何者在第二象限？
- (A) (b, c) (B) (a, b) (C) (c, a) (D) (c, b) 。
- () 3. 已知多項式 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x^2+x+1)$ 所得之餘式為 $3x^2+5x-2$ ，則 $f(x)$ 除以 x^2+x+1 所得之餘式為何？
- (A) -4 (B) $2x-5$ (C) 6 (D) $8x-5$ 。

- () 4.圖(一)為某校一年A班的英文考試之以下累積次數分配曲線圖，請問由圖(一)顯示之資訊可推得哪一個選項正確？



圖(一)

- (A)全距為100 (B)中位數介於60~70之間
(C)標準差為80 (D)百分等級 (PR 值) 高於90者只有一位。
- () 5.在一次立法委員選舉中，每位選民須投區域立委與不分區政黨兩種選票，且每種選票均只能圈選一位(個)，否則視為廢票。已知某甲的戶籍地有6位區域立委候選人，而全國共有14個政黨可選擇。若某甲決定去投票，且兩種選票均不投廢票，試問某甲有多少種的投票組合？
(A)6 (B)14 (C)20 (D)84。
- () 6.若 $\sin 80^\circ = a$ ， $\cos 59^\circ = b$ ，則 $\cos 21^\circ = ?$
(A) $a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}$ (B) $a\sqrt{1-b^2} - b\sqrt{1-a^2}$ (C) $ab - \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}$
(D) $ab + \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}$ 。
- () 7.若給定一橢圓標準式 $\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{144} = 1$ ，則下列何者正確？
(A)(4,-2)為其中一焦點
(B)(9,-2)為其中一長軸頂點
(C)(4,10)為其中一短軸頂點
(D)正焦弦長為 $\frac{25}{6}$ 。
- () 8.設 $(\sqrt{3} + i)z = -2\sqrt{3} + 2i$ ，其中 $i = \sqrt{-1}$ ，則 z 之主幅角為何？
(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{2\pi}{3}$ (C) $\frac{5\pi}{6}$ (D) $\frac{7\pi}{6}$ 。
- () 9.某棒球投手自4月1日開始每天練投，他每日投球數為等差數列。若4月5日投球數為41個，4月13日為73個，則他4月份有幾天投球數超過100個？
(A)10 (B)11 (C)12 (D)13。

- () 10. 在 $\begin{cases} x+2y-6 \geq 0 \\ x+y-10 \leq 0 \\ 2 \leq x \leq 9 \end{cases}$ 的條件下，求其可行解區域的面積（平方單位）為何？
 (A) $\frac{119}{4}$ (B) $\frac{59}{2}$ (C) $\frac{117}{4}$ (D) $\frac{55}{2}$ 。
- () 11. 設函數 $f(x) = 2\cos 3x - 1, x \in [0, 2\pi]$ ，若其圖形和 x 軸的交點個數與函數的最大值分別為 a 、 b ，則 $ab = ?$
 (A) 6 (B) 9 (C) 12 (D) 18。
- () 12. 保險公司推出躉繳型保單（即於一開始存入一固定本金），且宣告年利率為 3% 的複利，每年計算一次。若某人於 20 歲時，花 10 萬元購買此保單，則當保單價值達 20 萬元時，某人約幾歲？
 (A) 24 (B) 34 (C) 44 (D) 54。
- () 13. 設 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 32$ 在閉區間 $[-3, 3]$ 內的最大值與最小值分別為 m 、 n ，則 $m - n = ?$
 (A) 90 (B) 98 (C) 100 (D) 108。
- () 14. 坊間的擲骰子遊戲，一次擲出四顆公正骰子，在下列情形之下才可以計算其得點數（設 x 、 y 、 z 均不同），
 (1) 若骰子點數出現 x 、 x 、 y 、 z 時，則玩家之得點數為 $y + z$ ；
 (2) 若骰子點數出現 x 、 x 、 y 、 y 時，則玩家之得點數為 $2x$ 與 $2y$ 中較大者。
 求玩家擲出得點數為 3（即「BG」）的機率為何？
 (A) $\frac{1}{12}$ (B) $\frac{1}{18}$ (C) $\frac{1}{27}$ (D) $\frac{1}{36}$ 。
- () 15. 若 k 為實數，且點 $P(1, k)$ 為曲線 $kx^2 + y^2 + 2x - 4y + k - 1 = 0$ 上之一點，求曲線之圖形為何？
 (A) 圓 (B) 拋物線 (C) 橢圓 (D) 雙曲線。
- () 16. 滿足 $\log_{10-x^2}(x^2 + 3x + 2)$ 有意義的整數 x 共有多少個？
 (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 7。
- () 17. 設 $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x > 2 \\ x^2-2x+3, & x \leq 2 \end{cases}$ ，則 $f'(2) = ?$
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 不存在。
- () 18. 設 α 、 β 為方程式 $x^2 + 5x + k = 0$ 之二根，已知多項式 $f(x) = 2x^2 + 7x + 5$ 除以 $x - \alpha$ 、 $x - \beta$ 所得的餘式分別為 -1 、 2 ，則 $k = ?$
 (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7。

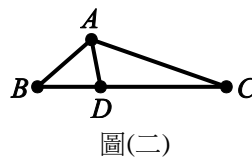
- () 19. 某家口罩工廠擁有5台A型機器和3台B型機器來製造口罩，平時每日總產量為11070個口罩。今因應肺炎疫情日趨嚴重，緊急添購3台A型機器和9台B型機器，並提高所有機器的每日產能至原先的150%，使得該工廠每日總產量增為42120個口罩，試問一台A型機器原先的每日產能為多少個？
(A)1350 (B)1380 (C)1410 (D)1440。

- () 20. 已知三階行列式 $\begin{vmatrix} a_1 - 2b_1 - 3c_1 & a_1 - 2c_1 & a_1 \\ a_2 - 2b_2 - 3c_2 & a_2 - 2c_2 & a_2 \\ a_3 - 2b_3 - 3c_3 & a_3 - 2c_3 & a_3 \end{vmatrix} = 8$ ，則 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = ?$
(A)-4 (B)-2 (C)2 (D)4。

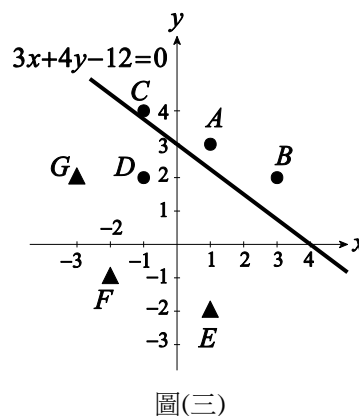
- () 21. 設平面上三點A(1,1)、B(5,-2)、C(5,2)，且 \vec{AC} 在 \vec{AB} 的正射影為 \vec{AD} ，若 $\vec{DC} = (x, y)$ ，則 $x + y = ?$
(A) $\frac{34}{25}$ (B) $\frac{89}{25}$ (C) $\frac{104}{25}$ (D) $\frac{112}{25}$ 。

- () 22. 設 a 為實數，將 $(ax+1)^4$ 展開後，若 x^3 之係數大於其他各項係數，則 a 的範圍為何？
(A) $a < 4$ (B) $a > \frac{3}{2}$ (C) $a > 4$ 或 $a < \frac{3}{2}$ (D) $\frac{3}{2} < a < 4$ 。

- () 23. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle A$ 之內角平分線交 \overline{BC} 於 D ，其中 $\overline{AB} = 3$ 、 $\overline{AC} = 6$ ，且 $\angle A = 120^\circ$ ，如圖(二)，則 $\overline{CD} = ?$
(A) $\sqrt{26}$ (B) $3\sqrt{3}$ (C) $2\sqrt{7}$ (D) $\sqrt{7}$ 。



- () 24. 在人工智慧的分類技術中，用到以直線分類不同物件的概念。設平面上有七個點A(1,3)、B(3,2)、C(-1,4)、D(-1,2)、E(1,-2)、F(-2,-1)、G(-3,2)分屬●、▲二類，其中直線 $L: 3x + 4y - 12 = 0$ 未能將它們正確分類，如圖(三)標示。若將 L 平行移動至新的位置成為新直線 L_1 且能達到正確分類目的，則下列何者可為 L_1 的直線方程式？



- (A) $3x + 4y + 2 = 0$ (B) $3x + 4y - 6 = 0$
(C) $6x + 8y + 3 = 0$ (D) $6x + 8y - 3 = 0$ 。
- () 25. 設 $g(x) = 2x - 1$ ，已知在閉區間 $[-1, 1]$ 上 $f(x) \geq 1$ 且 $\int_{-1}^1 f(x) dx = 5$ ，則此兩曲線 $y = f(x)$ 與 $y = g(x)$ 在閉區間 $[-1, 1]$ 所圍成區域的面積為何？
(A)4 (B)5 (C)6 (D)7。

109 年統一入學測驗 數學(C)

答 案

1.B 2.A 3.B 4.B 5.D 6.A 7.D 8.B 9.B 10.A
 11.A 12.C 13.C 14.C 15.A 16.A 17.B 18.C 19.A 20.C
 21.D 22.D 23.C 24.D 25.D

本試題答案係依據統一入學測驗中心公布之標準答案

1. 技巧與分析

(1) 當 $x < a$ 且 $x \rightarrow a$ ，會使得 $f(x) \rightarrow L$ ，則稱 $f(x)$ 在 a 的左極限為 L ，記作

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

(2) 當 $x > a$ 且 $x \rightarrow a$ ，會使得 $f(x) \rightarrow M$ ，則稱 $f(x)$ 在 a 的右極限為 M ，記作

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = M$$

(3) 若函數 $f(x)$ 定義域中的 x 無法滿足 $x < a$ ，則 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ 不存在

(4) 若函數 $f(x)$ 定義域中的 x 無法滿足 $x > a$ ，則 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 不存在

解析

(1) 令 $f_1(x) = \sqrt[3]{x-2}$

則 $f_1(x)$ 的定義域為所有實數

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{2-2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{2-2} = 0$$

(2) 令 $f_2(x) = \sqrt{x-2}$

則 $f_2(x)$ 的定義域為 $\{x | x \geq 2, x \in R\}$

$\therefore x < 2$ 不在定義域

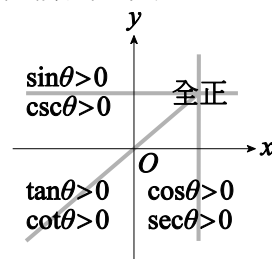
$\therefore \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{x-2}$ 不存在

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x-2} = \sqrt{2-2} = 0$$

由(1)、(2)可知，選項(B)錯誤

2. 技巧與分析

任意角三角函數的正負：



解析

(1) $\because 480^\circ = 360^\circ + 120^\circ$
 且 $90^\circ < 120^\circ < 180^\circ$

$\therefore 480^\circ$ 是第二象限角
 則 $a = \tan 480^\circ < 0$

(2) $\because 90^\circ < 135^\circ < 180^\circ$
 $\therefore 135^\circ$ 是第二象限角
 則 $b = \sec 135^\circ < 0$

(3) $\because -60^\circ$ 是第四象限角
 $\therefore c = \cos(-60^\circ) > 0$

由(1)、(2)、(3)可知

點 (b, c) 在第二象限

點 (a, b) 在第三象限

點 (c, a) 和點 (c, b) 在第四象限

故選(A)

3. 技巧與分析

除法原理：

若 $f(x) \div g(x) = Q(x) \dots R(x)$

則 $f(x) = g(x) \times Q(x) + R(x)$

解析

設 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x^2+x+1)$ 所得之商式為
 $Q(x)$

$$\begin{aligned} \text{則 } f(x) \div [(x-1)(x^2+x+1)] \\ = Q(x) \dots (3x^2+5x-2) \end{aligned}$$

由除法原理

$$f(x) = [(x-1)(x^2+x+1)]Q(x) + (3x^2+5x-2)$$

依上式可知， $f(x)$ 除以 x^2+x+1 的餘式就是

$3x^2+5x-2$ 除以 x^2+x+1 的餘式

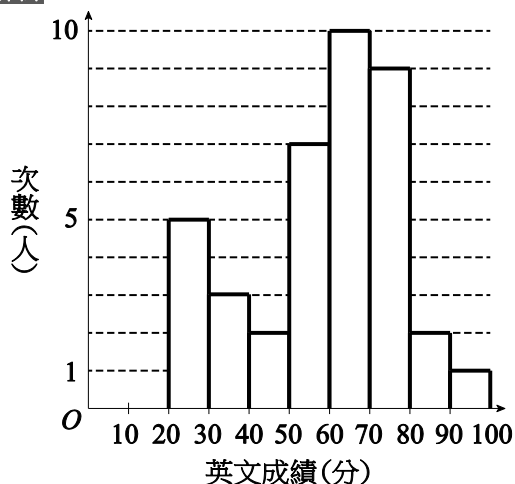
$$\begin{array}{r} 3 \\ 1+1+1 \overline{) 3 \quad +5 \quad -2} \\ \underline{3 \quad +3 \quad +3} \\ \quad \quad \quad 2 \quad -5 \end{array}$$

故所求餘式為 $2x-5$

4. 技巧與分析

了解統計的全距、中位數、標準差、百分等級 (PR 值) 的意義

解析



(A) 最高分落在 90~100 分

有可能是 100 分

最低分落在 20~30 分

有可能是 20 分

故全距為 $100-20=80$

(B) 全班有 39 人， $(39+1) \div 2 = 20$

所以成績的中位數是成績由低到高的第 20 位，介於 60~70 分之間

(C) \because 全班成績的全距為 80，而且成績分布並不極端

\therefore 標準差不可能為 80

(D) 成績 80 分以上的有 3 位

而第 3 名的成績勝過 $39-3=36$ 位

$$\text{又 } \frac{36}{39} \times 100 \approx 92.3$$

則第 3 名的百分等級 (PR 值) 為 92，因此百分等級 (PR 值) 高於 90 者不只有一位

故選(B)

5. 技巧與分析

乘法原理：

完成一件事需分成 2 個步驟，步驟 1 有 n_1 種方法，步驟 2 有 n_2 種方法，則完成此件事有 $n_1 \times n_2$ 種方法

解析

區域立委的選擇有 6 種

不分區政黨的選擇有 14 種

由乘法原理可知

投票組合有 $6 \times 14 = 84$ 種

6. 技巧與分析

(1) 餘角關係：

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$

(2) 餘弦的差角公式：

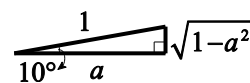
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

解析

$$(1) \because \sin 80^\circ = \sin(90^\circ - 10^\circ) = \cos 10^\circ$$

$$\therefore \cos 10^\circ = a$$

以 $\cos 10^\circ = a = \frac{a}{1}$ 來作圖

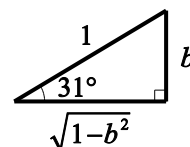


$$\text{則 } \sin 10^\circ = \frac{\sqrt{1-a^2}}{1} = \sqrt{1-a^2}$$

$$(2) \because \cos 59^\circ = \cos(90^\circ - 31^\circ) = \sin 31^\circ$$

$$\therefore \sin 31^\circ = b$$

以 $\sin 31^\circ = b = \frac{b}{1}$ 來作圖



$$\text{則 } \cos 31^\circ = \frac{\sqrt{1-b^2}}{1} = \sqrt{1-b^2}$$

(3) 由餘弦的差角公式，則

$$\begin{aligned}\cos 21^\circ &= \cos(31^\circ - 10^\circ) \\ &= \cos 31^\circ \times \cos 10^\circ + \sin 31^\circ \times \sin 10^\circ \\ &= \sqrt{1-b^2} \times a + b \times \sqrt{1-a^2} \\ &= a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}\end{aligned}$$

7. 技巧與分析

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

為上下焦點的橢圓，若 $a^2 = b^2 + c^2$ ，則

(1) 長軸頂點 $(h, k \pm a)$

(2) 短軸頂點 $(h \pm b, k)$

(3) 焦點 $(h, k \pm c)$

(4) 正焦弦長 $\frac{2b^2}{a}$

解析

橢圓： $\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{[y-(-2)]^2}{144} = 1$

$\therefore y^2$ 項的分母 $> x^2$ 項的分母

\therefore 橢圓有上、下焦點，中心 $(4, -2)$

(1) $a^2 = 144 \Rightarrow a = 12$

長軸頂點 $(4, -2 \pm 12)$

$\Rightarrow (4, 10), (4, -14)$

(2) $b^2 = 25 \Rightarrow b = 5$

短軸頂點 $(4 \pm 5, -2)$

$\Rightarrow (9, -2), (-1, -2)$

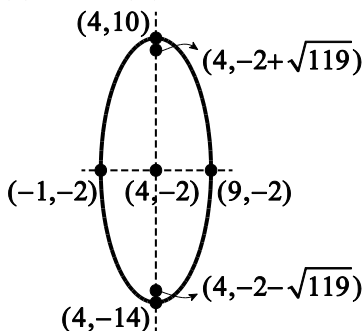
(3) $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 144 = 25 + c^2$

$\Rightarrow c^2 = 119 \Rightarrow c = \sqrt{119}$

焦點 $(4, -2 \pm \sqrt{119})$

(4) 正焦弦長 $\frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 25}{12} = \frac{25}{6}$

由(1)~(4)，故選(D)



8. 〈法一〉

技巧與分析

設 a, b, c, d 均為實數，則

$$\begin{aligned}\frac{a+bi}{c+di} &= \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} \\ &= \frac{(ac+bd) + (bc-ad)i}{c^2+d^2}\end{aligned}$$

解析

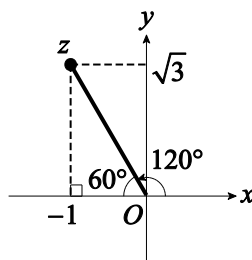
$$(\sqrt{3}+i)z = -2\sqrt{3}+2i$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow z &= \frac{-2\sqrt{3}+2i}{\sqrt{3}+i} = \frac{(-2\sqrt{3}+2i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} \\ &= \frac{-6+2\sqrt{3}i+2\sqrt{3}i-2i^2}{(\sqrt{3})^2+1^2} = \frac{-4+4\sqrt{3}i}{4}\end{aligned}$$

$$= \frac{-4}{4} + \frac{4\sqrt{3}i}{4} = -1 + \sqrt{3}i$$

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

如圖， z 的主幅角為 $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$



〈法二〉

技巧與分析

設 $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ ，

$z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \neq 0$ ，

$$\text{則 } \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

解析

$$(\sqrt{3}+i)z = -2\sqrt{3}+2i \Rightarrow z = \frac{-2\sqrt{3}+2i}{\sqrt{3}+i}$$

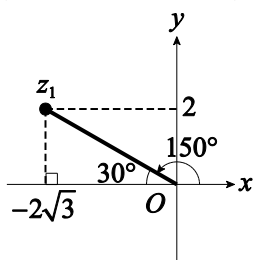
令 $z_1 = -2\sqrt{3}+2i$ ， $z_2 = \sqrt{3}+i$

(1) z_1 的極式：

$$|z_1| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{16} = 4$$

如圖， z_1 的主幅角為 $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$

$$\text{則 } z_1 = 4(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$$

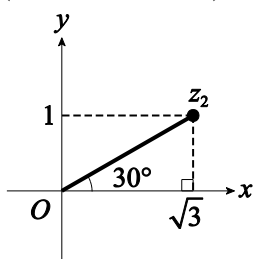


(2) z_2 的極式：

$$|z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

如圖， z_2 的主幅角為 30°

$$\text{則 } z_2 = 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$$



由(1)和(2)可知：

$$\begin{aligned} z &= \frac{z_1}{z_2} = \frac{4(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)}{2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)} \\ &= \frac{4}{2} \times [\cos(150^\circ - 30^\circ) + i \sin(150^\circ - 30^\circ)] \\ &= 2(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) \end{aligned}$$

因此 z 的主幅角為 $120^\circ = \frac{2\pi}{3}$

9. 技巧與分析

設 $\{a_n\}$ 為等差數列，公差為 d ，

$$\text{則 } a_n = a_1 + (n-1)d = a_m + (n-m)d$$

解析

設 4 月 n 日的投球數是 a_n 個

則 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{30}$ 為等差數列

設此等差數列的公差為 d

由題意知： $a_5 = 41$ ， $a_{13} = 73$

$$\text{則 } a_{13} = a_5 + (13-5) \times d$$

$$\Rightarrow 73 = 41 + 8d \Rightarrow 8d = 32 \Rightarrow d = 4$$

若 $a_n > 100$

$$a_n = a_{13} + (n-13) \times d$$

$$= 73 + (n-13) \times 4 = 4n + 21$$

$$\text{則 } 4n + 21 > 100$$

$$\Rightarrow 4n > 79 \Rightarrow n > \frac{79}{4} = 19.75, \text{ 取 } n = 20$$

故 4 月 20 日起，每日的投球數超過 100 個

從 4 月 20 日到 4 月 30 日共有 11 天

因此 4 月份有 11 天投球數超過 100 個

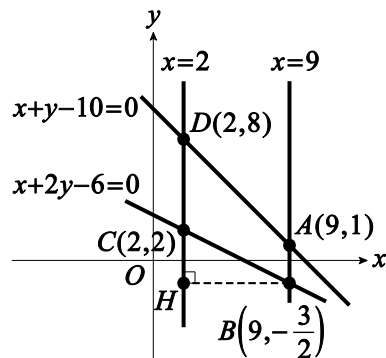
10. 技巧與分析

(1) 圖解聯立不等式

(2) 求出可行解區域的頂點

解析

滿足不等式條件的區域如下圖



四邊形 $ABCD$ 為梯形

$$\overline{AB} = 1 - \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}$$

$$\overline{CD} = 8 - 2 = 6$$

$$\overline{BH} = 9 - 2 = 7$$

$$\text{梯形 } ABCD \text{ 的面積} = \frac{\left(\frac{5}{2} + 6\right) \times 7}{2} = \frac{119}{4}$$

故可行解區域的面積為 $\frac{119}{4}$ (平方單位)

11. 技巧與分析

(1) 若 $f(x)$ 的週期為 T ，

$$\text{則 } f(kx) \text{ 的週期為 } \frac{T}{|k|} \quad (k \neq 0)$$

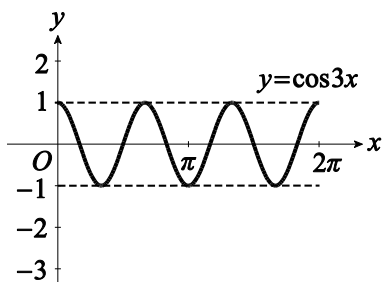
(2) 熟悉三角函數的圖形，並了解其伸縮和平移

解析

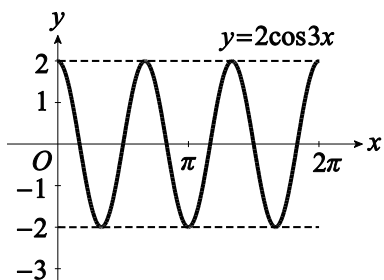
(1) 由於 $\cos x$ 的週期是 2π ，故 $\cos 3x$ 的週期

是 $\frac{2\pi}{3}$ ，把 $y = \cos x$ 的圖形以 y 軸為基準

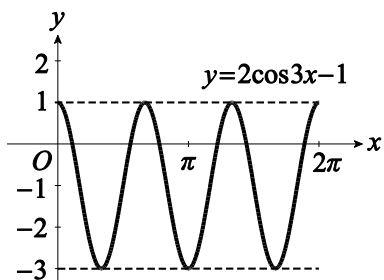
壓縮 $\frac{1}{3}$ 倍，就是 $y = \cos 3x$ 的圖形



(2) 把 $y = \cos 3x$ 的圖形以 x 軸為基準拉伸 2 倍，就是 $y = 2\cos 3x$ 的圖形



(3) 把 $y = 2\cos 3x$ 的圖形向下平移 1 單位，就是 $y = 2\cos 3x - 1$ 的圖形



故 $f(x) = 2\cos 3x - 1$ 在閉區間 $[0, 2\pi]$ 的圖形和 x 軸有 6 個交點，其最大值為 1，即 $a = 6$ 、 $b = 1$

因此 $ab = 6 \times 1 = 6$

12. 技巧與分析

複利公式：

若 P 為本金， r 為每期利率， n 為期數，則 n 期後的本利和 $= P(1+r)^n$

解析

n 年後

此人的保單價值為 $100000 \times (1+3\%)^n$ 元

令 $100000 \times (1+3\%)^n \geq 200000$

$$\Rightarrow (1.03)^n \geq 2$$

$$\Rightarrow \log_{10}(1.03)^n \geq \log_{10} 2$$

$$\Rightarrow n \times \log_{10} 1.03 \geq \log_{10} 2$$

$$\Rightarrow n \times 0.0128 \geq 0.3010$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{0.3010}{0.0128} \approx 23.52, \text{ 取 } n = 24$$

故此人 24 年後，保單價值超過 20 萬元
其年紀是 $20 + 24 = 44$ 歲

13. 技巧與分析

設多項式函數 $f(x)$ 在閉區間 $[a, b]$ ，其最大(小)值會出現在閉區間 $[a, b]$ 的端點或導數為 0 的點

解析

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 32$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 24 = 3(x^2 - 2x - 8) \\ = 3(x+2)(x-4)$$

$$\text{令 } f'(x) = 0$$

$$\Rightarrow 3(x+2)(x-4) = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ 或 } 4$$

$\because x = 4$ 不在閉區間 $[-3, 3]$ 內

$\therefore x = 4$ 不予考慮

將閉區間 $[-3, 3]$ 的端點 $x = -3$ 與 $x = 3$ ，以及 $x = -2$ 代入 $f(x)$ 求值：

$$f(-3) = (-3)^3 - 3 \times (-3)^2 - 24 \times (-3) + 32 = 50$$

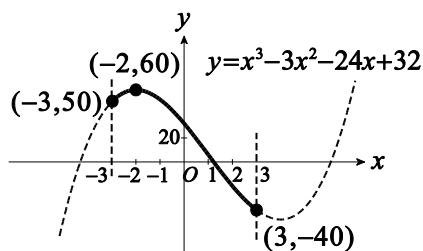
$$f(3) = 3^3 - 3 \times 3^2 - 24 \times 3 + 32 = -40$$

$$f(-2) = (-2)^3 - 3 \times (-2)^2 - 24 \times (-2) + 32 = 60$$

故 $f(x)$ 在閉區間 $[-3, 3]$ 內的最大值 $m = 60$

最小值 $n = -40$

因此 $m - n = 60 - (-40) = 100$



14. 技巧與分析

事件 A 的機率：

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}, \text{ 其中 } S \text{ 為樣本空間}$$

解析

設樣本空間為 S ，則 $n(S) = 6^4 = 1296$

$\therefore x, y, z$ 均不同

\therefore 擲出得點數為 3 的有以下 4 類：

$$(1) 3、3、1、2 : \frac{4!}{2!} = 12$$

$$(2) 4、4、1、2 : \frac{4!}{2!} = 12$$

$$(3) 5、5、1、2 : \frac{4!}{2!} = 12$$

$$(4) 6、6、1、2 : \frac{4!}{2!} = 12$$

共有 $12 \times 4 = 48$ 種

因此擲出得點數為 3 的機率為 $\frac{48}{1296} = \frac{1}{27}$

15. 技巧與分析

曲線 $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ ($r > 0$) 是圓

解析

\therefore 點 $P(1, k)$ 為曲線上一點

$$\therefore k \times 1^2 + k^2 + 2 \times 1 - 4 \times k + k - 1 = 0$$

$$\Rightarrow k^2 - 2k + 1 = 0 \Rightarrow (k-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow k-1=0 \Rightarrow k=1$$

曲線為 $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$

$$\Rightarrow (x^2 + 2x + 1^2) + (y^2 - 2 \times 2 \times y + 2^2) = 1 + 4$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$$

故此曲線之圖形為圓

16. 技巧與分析

若對數 $\log_a b$ 有意義，

則(1)底數 $a > 0$ 且 $a \neq 1$

(2)真數 $b > 0$

解析

對數 $\log_{10-x^2}(x^2+3x+2)$ 有意義，則

(1) 底數 $10-x^2 > 0$ 且 $10-x^2 \neq 1$

$$\Rightarrow x^2 - 10 < 0 \text{ 且 } x^2 \neq 9$$

$$\Rightarrow (x+\sqrt{10})(x-\sqrt{10}) < 0 \text{ 且 } x \neq \pm 3$$

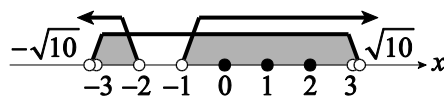
$$\Rightarrow -\sqrt{10} < x < \sqrt{10} \text{ 且 } x \neq \pm 3$$

(2) 真數 $x^2+3x+2 > 0$

$$\Rightarrow (x+2)(x+1) > 0$$

$$\Rightarrow x < -2 \text{ 或 } x > -1$$

由(1)、(2)可知， x 的範圍如下：



使對數有意義的整數 x 為 0、1 或 2，共有 3 個

17. 技巧與分析

函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處的導數定義：

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

解析

當 $x \leq 2$ 時， $f(x) = x^2 - 2x + 3$

$$\text{則 } f(2) = 2^2 - 2 \times 2 + 3 = 3$$

由導數的定義： $f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

(1) 當 $x \leq 2$ 時

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x^2 - 2x + 3) - 3}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 2x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} x = 2 \end{aligned}$$

(2) 當 $x > 2$ 時

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2x-1) - 3}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} 2 = 2 \end{aligned}$$

由(1)、(2)可知： $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 2$

因此 $f'(2) = 2$

18. 技巧與分析

若方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 有兩根 α, β ，則

$$(1) \text{ 兩根和 } \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$(2) \text{ 兩根積 } \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

解析

$\therefore \alpha, \beta$ 為方程式 $x^2 + 5x + k = 0$ 之二根

$$\therefore \text{兩根和 } \alpha + \beta = -\frac{5}{1} = -5$$

$$\text{兩根積 } \alpha\beta = \frac{k}{1} = k$$

$$\text{而 } \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-5)^2 - 2 \times k \\ = 25 - 2k$$

$\therefore f(x) = 2x^2 + 7x + 5$ 除以 $x - \alpha$ 、 $x - \beta$ 的
餘式分別為 -1 、 2

$$\therefore f(\alpha) = 2\alpha^2 + 7\alpha + 5 = -1 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f(\beta) = 2\beta^2 + 7\beta + 5 = 2 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} : 2(\alpha^2 + \beta^2) + 7(\alpha + \beta) + 10 = 1$$

$$\Rightarrow 2 \times (25 - 2k) + 7 \times (-5) + 10 = 1$$

$$\Rightarrow 50 - 4k + (-35) + 10 = 1$$

$$\Rightarrow -4k = -24 \Rightarrow k = 6$$

19. 技巧與分析

- (1) 依據題意列出相關的方程式
- (2) 利用加減消去法解聯立方程式

解析

設 A 、 B 型機器原先一台的每日產能分別為
 x 、 y 個口罩，由題意可知

平時口罩的每日總產量：

$$5x + 3y = 11070 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

目前緊急添購機器後

A 型有 $5 + 3 = 8$ 台， B 型有 $3 + 9 = 12$ 台

\therefore 目前提高所有機器的每日產能至原先的
150%

\therefore 目前口罩的每日總產量：

$$(8x + 12y) \times 150\%$$

$$\Rightarrow 12x + 18y = 42120$$

$$\stackrel{\div 6}{\Rightarrow} 2x + 3y = 7020 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} : 3x = 4050 \stackrel{\div 3}{\Rightarrow} x = 1350$$

因此一台 A 型機器原先的每日產能為 1350
個口罩

20. 技巧與分析

行列式的運算性質：

- (1) 某行的 k 倍加到另一行時，行列式的值不變
- (2) 當某行的元素有公因數時，可提出
- (3) 任意兩行互換時，行列式的值會變號

解析

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} \times(-1) & & \times(-1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \begin{vmatrix} a_1 - 2b_1 - 3c_1 & a_1 - 2c_1 & a_1 \\ a_2 - 2b_2 - 3c_2 & a_2 - 2c_2 & a_2 \\ a_3 - 2b_3 - 3c_3 & a_3 - 2c_3 & a_3 \end{vmatrix} \end{matrix} \\ \therefore & \begin{matrix} \\ \\ \\ \times\left(-\frac{3}{2}\right) \\ \downarrow \\ \begin{vmatrix} -2b_1 & -3c_1 & -2c_1 \\ 2b_2 & -3c_2 & 2c_2 \\ -2b_3 & -3c_3 & -2c_3 \end{vmatrix} \\ \\ \\ \begin{vmatrix} -2b_1 & -2c_1 & a \\ -2b_2 & -2c_2 & a \\ -2b_3 & -2c_3 & a \end{vmatrix} \end{matrix} \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} \downarrow & & \downarrow \\ \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a \\ b_2 & c_2 & a \\ b_3 & c_3 & a \end{vmatrix} \end{matrix}$$

$$= (-2) \times (-2) \times \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a \\ b_2 & c_2 & a \\ b_3 & c_3 & a \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} \downarrow & & \downarrow \\ \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b \\ a_2 & c_2 & b \\ a_3 & c_3 & b \end{vmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} \\ \frac{1}{3} 4 \times \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} \end{matrix}$$

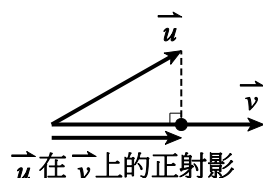
$$\therefore 4 \times \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 8$$

$$\stackrel{\div 4}{\Rightarrow} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2$$

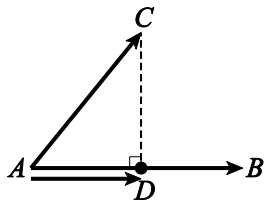
21. 技巧與分析

向量 \vec{u} 在 \vec{v} 上的正射影：

$$\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \right) \vec{v}$$



解析



$$\therefore A(1,1), B(5,-2), C(5,2)$$

$$\therefore \vec{AC} = (5-1, 2-1) = (4, 1)$$

$$\vec{AB} = (5-1, -2-1) = (4, -3)$$

$$\vec{AC} \text{ 在 } \vec{AB} \text{ 上的正射影 } \vec{AD} = \left(\frac{\vec{AC} \cdot \vec{AB}}{|\vec{AB}|^2} \right) \vec{AB}$$

$$= \frac{(4, 1) \cdot (4, -3)}{(\sqrt{4^2 + (-3)^2})^2} (4, -3)$$

$$= \frac{4 \times 4 + 1 \times (-3)}{5^2} (4, -3) = \frac{13}{25} (4, -3)$$

$$= \left(\frac{13}{25} \times 4, \frac{13}{25} \times (-3) \right) = \left(\frac{52}{25}, -\frac{39}{25} \right)$$

$$\therefore \vec{CD} = \vec{CA} + \vec{AD} = -\vec{AC} + \vec{AD}$$

$$= (-4, -1) + \left(\frac{52}{25}, -\frac{39}{25} \right)$$

$$= \left(-4 + \frac{52}{25}, -1 - \frac{39}{25} \right)$$

$$= \left(-\frac{4}{25}, -\frac{64}{25} \right)$$

$$\therefore \vec{DC} = -\vec{CD} = \left(\frac{48}{25}, \frac{64}{25} \right)$$

$$\text{而 } \vec{DC} = (x, y), \text{ 則 } x = \frac{48}{25}, y = \frac{64}{25}$$

$$\text{因此 } x + y = \frac{48}{25} + \frac{64}{25} = \frac{112}{25}$$

22. 技巧與分析

(1) 二項式定理

$$(x+y)^4 = C_0^4 x^4 + C_1^4 x^3 y + C_2^4 x^2 y^2 + C_3^4 x y^3 + C_4^4 y^4$$

(2) 一元高次不等式的解

解析

由二項式定理知

$$\begin{aligned} (ax+1)^4 &= C_0^4 (ax)^4 + C_1^4 (ax)^3 \times 1 \\ &+ C_2^4 (ax)^2 \times 1^2 + C_3^4 (ax) \times 1^3 + C_4^4 \times 1^4 \\ &= a^4 x^4 + 4a^3 x^3 + 6a^2 x^2 + 4ax + 1 \end{aligned}$$

其 x^3 之係數為 $4a^3$

而其他各項係數為 a^4 、 $6a^2$ 、 $4a$ 、 1

由題意知 x^3 之係數大於其他各項係數，故

$$4a^3 > a^4, 4a^3 > 6a^2, 4a^3 > 4a, 4a^3 > 1$$

$$(1) 4a^3 > a^4 \Rightarrow a^4 - 4a^3 < 0$$

$$\Rightarrow a^2(a^2 - 4a) < 0 \xrightarrow{\div a^2} a^2 - 4a < 0$$

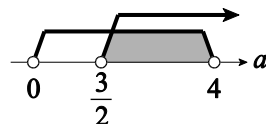
$$\Rightarrow a(a-4) < 0 \Rightarrow 0 < a < 4$$

$$(2) 4a^3 > 6a^2 \Rightarrow 4a^3 - 6a^2 > 0$$

$$\Rightarrow 2a^2(2a-3) > 0 \xrightarrow{\div 2a^2} 2a-3 > 0$$

$$\Rightarrow a > \frac{3}{2}$$

由(1)和(2)可得 $\frac{3}{2} < a < 4$



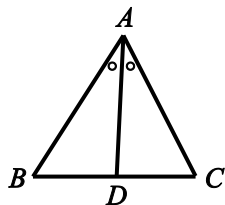
而 $\frac{3}{2} < a < 4$ 滿足 $4a^3 > 4a$ 和 $4a^3 > 1$

因此 a 的範圍為 $\frac{3}{2} < a < 4$

23. 技巧與分析

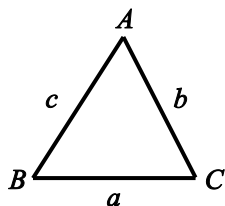
(1) 角平分線性質：

如圖，若 \overline{AD} 平分 $\angle BAC$
則 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$

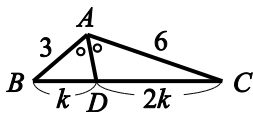


(2) 餘弦定理：

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$



解析



$\therefore \angle A$ 之內角平分線交 \overline{BC} 於 D

且 $\overline{AB} : \overline{AC} = 3 : 6 = 1 : 2$

$\therefore \overline{BD} : \overline{CD} = 1 : 2$

設 $\overline{BD} = k$ ， $\overline{CD} = 2k$ ，其中 $k > 0$

則 $\overline{BC} = k + 2k = 3k$

令 $a = \overline{BC}$ ， $b = \overline{AC}$ ， $c = \overline{AB}$

由餘弦定理知：

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\Rightarrow (3k)^2 = 6^2 + 3^2 - 2 \times 6 \times 3 \times \cos 120^\circ$$

$$\Rightarrow 9k^2 = 36 + 9 - 2 \times 6 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

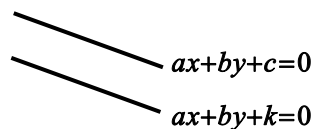
$$\Rightarrow k^2 = 7 \Rightarrow k = \pm\sqrt{7} \quad (-\sqrt{7} \text{ 不合})$$

因此 $\overline{CD} = 2k = 2\sqrt{7}$

24. 技巧與分析

平行於 $ax + by + c = 0$ 的直線

可以假設為 $ax + by + k = 0$



解析

(1) 設通過點 $D(-1, 2)$ 且平行 L 的直線為

$$L_2 : 3x + 4y + n_1 = 0$$

把 $D(-1, 2)$ 代入得 $3 \times (-1) + 4 \times 2 + n_1 = 0$

$$\Rightarrow n_1 = -5$$

$$\text{則 } L_2 : 3x + 4y - 5 = 0$$

(2) 設通過點 $G(-3, 2)$ 且平行 L 的直線為

$$L_3 : 3x + 4y + n_2 = 0$$

把 $G(-3, 2)$ 代入得 $3 \times (-3) + 4 \times 2 + n_2 = 0$

$$\Rightarrow n_2 = 1$$

$$\text{則 } L_3 : 3x + 4y + 1 = 0$$

(3) $\because L_1 \parallel L$ 且 L_1 可把平面上七個點分成

●、▲二類

\therefore 直線 L_1 位於 L_2 和 L_3 之間

因此 L_1 可以寫成 $3x + 4y + k = 0$

其中 $-5 < k < 1$

則 (A) $3x + 4y + 2 = 0$ (不合)

(B) $3x + 4y - 6 = 0$ (不合)

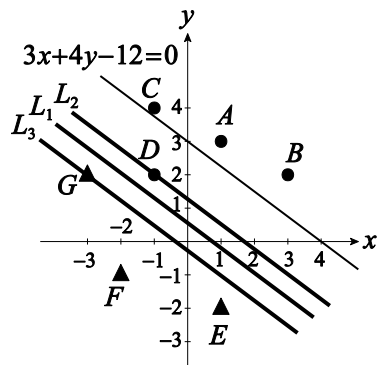
(C) $6x + 8y + 3 = 0$

$$\stackrel{\div 2}{\Rightarrow} 3x + 4y + \frac{3}{2} = 0 \quad (\text{不合})$$

(D) $6x + 8y - 3 = 0$

$$\stackrel{\div 2}{\Rightarrow} 3x + 4y - \frac{3}{2} = 0 \quad (\text{符合})$$

故選 (D)

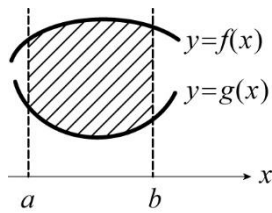


25. 技巧與分析

設兩函數 $f(x)$ 、 $g(x)$ 在閉區間 $[a, b]$

若 $f(x) \geq g(x)$ ，則兩函數在閉區間所圍成區

域的面積為 $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$



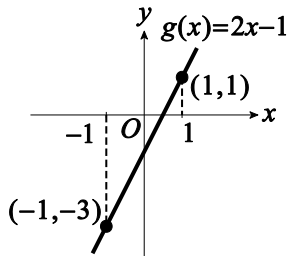
解析

(1) 令 $y = 2x - 1$

x	-1	1
y	-3	1

則 $y = g(x)$ 的圖形如圖

在閉區間 $[-1, 1]$ 上的 $g(x) \leq 1$



(2) \because 在閉區間 $[-1, 1]$ 上的 $f(x) \geq 1$

$\therefore y = f(x)$ 與 $y = g(x)$ 在閉區間 $[-1, 1]$

所圍成區域的面積為

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 [f(x) - g(x)] dx \\ &= \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_{-1}^1 g(x) dx \end{aligned}$$

由題意知 $\int_{-1}^1 f(x) dx = 5$

$$\begin{aligned} \text{而 } \int_{-1}^1 g(x) dx &= \int_{-1}^1 (2x - 1) dx = (x^2 - x) \Big|_{-1}^1 \\ &= (1^2 - 1) - [(-1)^2 - (-1)] \\ &= -2 \end{aligned}$$

故所求的面積 $= 5 - (-2) = 7$