

數學 (B)

一、試題分析

1. 難易適中：

近幾年的統測試題都相當穩定，各章節考題皆偏向基本計算，惟重點觀念仍需正確。

2. 試題簡易化，重視基本觀念：

此份考題，第 2、3、4、6、10、20、23、24 題皆為觀念正確、了解題目敘述所代表之數學概念，即可輕易解答。

第 13、19 題雖為二次曲線之考題，但實則為第一章直線方程式之基本運算。

3. 提升閱讀能力，將有助於快速理解題目與數學的關聯性：

不難看出許多考題仍以素養方式敘述，舉凡第 3、8、20、24 題。同學可特別注意此類考題常常偏容易，主要測驗考生對生活中數學敘述的理解能力。

4. 部分題型有答案逆推或是侷限之現象，並出現普高題型但技高改得較簡易：

第 7 題：利用 $-1 \leq x \leq 5$ 推算出絕對值不等式及二次不等式較不容易，但由答案計算符合相同範圍則為簡易。

第 17 題：普高考題針對奇函數做定積分，因積分範圍為正負對稱，即可知悉答案為 0。所幸計算過程不難，考生亦可嘗試實際代入計算定積分值。

第 18 題：與雙曲線不相交直線有無限多條，漸近線則為其中兩條，而答案即為漸近線，讓此題符合技高所學內容。

第 21 題：此為普高三根之根與係數，巧妙利用已知一根，再運用綜合除法，將方程式降為二次後，再利用二次方程式之根與係數。

第 22 題：技高較缺乏解聯立時有平方之計算，此題設計讓 A 、 B 兩點之 y 坐標相同，減低所需的計算量。

5. 考題規律剖析：

106、107 年考題按照章節順序命題，而去年與今年皆無此規律。今年再度以公平原則分配答案平均， $A \sim D$ 各出現 6~7 次，並且選項中的答案若為數值，都會按照大小順序出現，對於數感較好的同學將有利於答案正確性的分析。

二、配分比例表

單元名稱	題數	單元名稱	題數
直線方程式	0	不等式及其應用	2
三角函數	2	排列組合	2
向量	1	機率	2
指數與對數及其運算	1	統計	2
數列與級數	1	三角函數的應用	2
式的運算	3	二次曲線	4
方程式	1	微積分及其應用	2



109 學年度四技二專統一入學測驗

數學(B)

數學 B 參考公式

1. 二倍角公式： $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

2. 設有一組母體資料 x_1, x_2, \dots, x_N ，其算術平均數為 μ ，則母體標準差為

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N}}$$

3. 點 $P(x_0, y_0)$ 到直線 $L: ax + by + c = 0$ 的距離為 $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

4. 參考數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ 、 $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ 、 $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ 、 $\log_{10} 7 \approx 0.8451$

單選題 (每題 4 分，共 100 分)

() 1. 若 $\sin 2\theta = \frac{1}{2}$ ，則 $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = ?$

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) 1 (D) $\frac{3}{2}$ 。

() 2. 若 θ 為一個象限角，且由計算器得知 $\sin\theta$ 及 $\cos\theta$ 都小於 0，則 θ 為哪一象限角？

(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限。

() 3. 某一個電腦的過關遊戲中，從據點 A 到據點 C 必須經過據點 B。若從據點 A 到據點 B 可以選擇的路徑有 2 條，從據點 B 到據點 C 可以選擇的路徑有 3 條，則從據點 A 到據點 C 有幾種走法？

(A) 5 (B) 6 (C) 8 (D) 9。

() 4. 若 $f(x) = x + \pi^2$ ，其中 π 為圓周率，則 $f'(x) = ?$

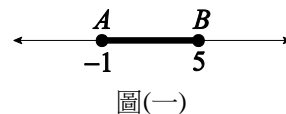
(A) 1 (B) $1 + \pi$ (C) $1 + 2\pi$ (D) $1 + \pi^2$ 。

() 5. 若 θ 為第二象限角，且 $\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$ ，則 $\cos\theta = ?$

(A) $-\frac{3}{4}$ (B) $-\frac{\sqrt{5}}{4}$ (C) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ (D) $\frac{3}{4}$ 。

- () 6. 已知甲、乙兩人同時投資不同股票且兩人的投資互不影響。若甲的獲利機率為 0.5，乙的獲利機率為 0.8，則兩人同時獲利的機率為何？
(A) 0.8 (B) 0.65 (C) 0.5 (D) 0.4。

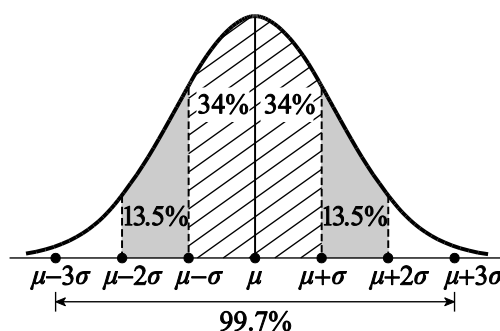
- () 7. 若點 A 與點 B 在數線上的坐標分別是 -1 與 5 ，則線段 \overline{AB} (包含兩端點，如圖(一)所示) 是下列哪一個不等式之解的圖形？



- (A) $|x-1| \leq 4$ (B) $|x+1| \leq 5$ (C) $x^2 - 4x - 5 \leq 0$ (D) $x^2 + 6x + 5 \leq 0$ 。

- () 8. A 公司提供的免費午餐有素食及葷食二種選擇。根據某員工在公司的用餐習慣，用素食的隔天再用素食的機率為 0.8，而用葷食的隔天用素食的機率為 0.5。若該員工星期二用葷食，則星期四用素食的機率為何？
(A) 0.25 (B) 0.4 (C) 0.64 (D) 0.65。

- () 9. 已知某項考試共有 3600 人應考，考試成績近似常態分配，如圖(二)所示，又考試成績的平均分數 μ 為 65 分，標準差 σ 為 10 分。若成績高於 85 分的人數為 x ，則下列何者正確？



- (A) $x \leq 50$
(B) $51 \leq x \leq 150$
(C) $151 \leq x \leq 250$
(D) $251 \leq x \leq 350$ 。

- () 10. 已知某班學生期中考數學科平均成績為 45 分。若老師將每位學生數學科成績加 20 分，則該科的統計資料中平均數、中位數、眾數、標準差在下列敘述中何者正確？
(A) 僅平均數加 20 分 (B) 僅平均數、中位數加 20 分
(C) 僅標準差未加 20 分 (D) 全部都加 20 分。

- () 11. 2^{1000} 大約等於下列何者？
(A) 10^{100} (B) 10^{200} (C) 10^{300} (D) 10^{400} 。

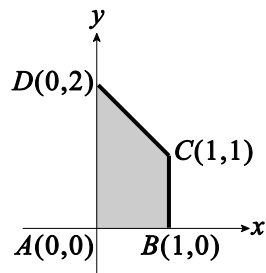
- () 12. 若 $a + a^{-1} = 2$ ，則 $a^3 + a^{-3} = ?$
(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8。

- () 13. 若 A 、 B 兩點分別是拋物線 $y = x^2$ 與直線 $x = -3$ 、 $x = 1$ 的交點，則直線 \overleftrightarrow{AB} 與下列哪一條直線平行？
(A) $y = -2x$ (B) $y = \frac{-1}{2}x$ (C) $y = \frac{1}{2}x$ (D) $y = 2x$ 。

() 14. 已知 $(x+1)^3$ 除 $f(x)$ 的餘式為 $x^2 - 2x + 3$ 。若 $(x+1)^2$ 除 $f(x)$ 的餘式為 $ax + b$ ，則 $a + b = ?$

(A) -2 (B) -1 (C) 3 (D) 4。

() 15. 如圖(三)所示，四邊形 $ABCD$ 的四個頂點為 $A(0, 0)$ 、 $B(1, 0)$ 、 $C(1, 1)$ 及 $D(0, 2)$ ，則四邊形 $ABCD$ 區域為下列哪一個聯立不等式的圖解？



圖(三)

(A) $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \\ x + 2y \leq 2 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \\ 2x + y \leq 2 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ x + y \leq 2 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \\ x + y \leq 2 \end{cases}$ 。

() 16. 利用降階法將行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ 依第二列展開，可得

$a \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ x & 1 \end{vmatrix} + b \cdot \begin{vmatrix} 1 & y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & z \end{vmatrix}$ ，則 $a + b + c + x + y + z = ?$

(A) -4 (B) 0 (C) 5 (D) 6。

() 17. 求 $\int_{-2}^2 (30x^5 - 16x^7 - 20x^3) dx = ?$

(A) -192 (B) -6 (C) 0 (D) 192。

() 18. 若 C 為坐標平面上的雙曲線，且其方程式為 $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ ，則下列哪一條直線與 C 沒有交點？

(A) $y = \frac{-2}{5}x$ (B) $y = \frac{-1}{5}x$ (C) $y = \frac{3}{5}x$ (D) $y = \frac{4}{5}x$ 。

() 19. 已知圓 $C : (x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$ 。若點 P 是圓 C 上一點，則 P 到直線 $L : 3x + 4y + 8 = 0$ 的最短距離為何？

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4。

() 20. A 學校桌球校隊有甲、乙、丙、丁、戊五位選手，有一天 A 學校桌球校隊與他校進行友誼賽。由於時間關係，只進行單打、雙打比賽各一場，且兩場比賽同時進行。若任意推出選手參賽（不考慮默契等因素），則 A 學校可推出的參賽選手名單有多少種？

(A) 12 (B) 30 (C) 125 (D) 243。

- () 21. 已知 α 、 β 及 -3 為方程式 $x^3 - x^2 - 11x + 3 = 0$ 的三個相異解。求 $|\alpha - \beta| = ?$
 (A) $2\sqrt{3}$ (B) 4 (C) 6 (D) $4\sqrt{5}$ 。
- () 22. 已知 $A(-1, 4)$ 、 $B(5, 4)$ 為坐標平面上兩點。若拋物線 $H: y = C(x - h)^2$ 通過 A 、 B 兩點，則 $C + h = ?$
 (A) $\frac{13}{5}$ (B) $\frac{22}{9}$ (C) $\frac{18}{7}$ (D) $\frac{17}{4}$ 。
- () 23. 已知 $A(3, 1)$ 、 $B(2, -3)$ 、 $C(7, -1)$ 及 $D(x, y)$ 為坐標平面上的四個點。若 $\vec{AB} + 2\vec{AC} = \vec{CD}$ ，則 $x + y = ?$
 (A) -8 (B) -4 (C) 5 (D) 6。
- () 24. 某部以“尋寶”為主題的電影中，男主角進到第二道關卡時看到了一扇巨大的鐵門，門邊有 100 個按鈕，每個按鈕都有一個數字，分別是從 1 到 100。牆上有一個過關提示，上面印著：“有一個等差數列，其第 11 項和第 16 項分別為 31 和 56，按下該數列第 20 項數字的按鈕，鐵門就會打開”，則按下哪一個數字的按鈕就會開門？
 (A) 65 (B) 76 (C) 83 (D) 99。
- () 25. 某甲沿著馬路向正前方一棟大樓直線前進，抬頭看大樓頂端的仰角為 30 度，走了 100 公尺後，第二次抬頭看大樓頂端，此時的仰角為 45 度，則第二次抬頭看大樓時距離大樓還有多遠？
 (A) $25(\sqrt{3} - 1)$ (B) $50(\sqrt{3} + 1)$ (C) $100(\sqrt{3} - 1)$ (D) $100(\sqrt{3} + 1)$ 。

109 年統一入學測驗 數學(B)

答 案

1.D 2.C 3.B 4.A 5.A 6.D 7.C 8.D 9.B 10.C
 11.C 12.A 13.A 14.A 15.D 16.B 17.C 18.D 19.D 20.B
 21.A 22.B 23.C 24.B 25.B

本試題答案係依據統一入學測驗中心公布之標準答案

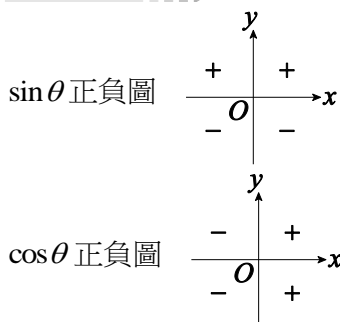
1. 技巧與分析

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \quad \sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta$$

解析

$$\begin{aligned} (\sin \theta + \cos \theta)^2 &= \sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= 1 + 2\sin \theta \cos \theta \\ &= 1 + \sin 2\theta \\ &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

2. 技巧與分析



解析

$\sin \theta < 0$
 $\Rightarrow \theta$ 可能為第三或第四象限角……①
 $\cos \theta < 0$
 $\Rightarrow \theta$ 可能為第二或第三象限角……②
 由①②得 θ 為第三象限角

3. 技巧與分析

乘法原理

解析

A 至 C 包含 步驟一：A 至 B，2 種方法
 步驟二：B 至 C，3 種方法
 根據乘法原理共有 $2 \times 3 = 6$ 種走法

4. 技巧與分析

多項式微分

$$f(x) = x^n \quad (n \neq 0)$$

$$\Rightarrow \frac{df(x)}{dx} = f'(x) = nx^{n-1}$$

$$f(x) = k, \quad k \text{ 為常數} \Rightarrow \frac{df(x)}{dx} = f'(x) = 0$$

解析

$$f(x) = x + \pi^2 \quad (\pi \text{ 為圓周率} \Rightarrow \pi \text{ 為常數})$$

$$\Rightarrow f'(x) = 1 + 0 = 1$$

5. 技巧與分析

廣義角之三角函數：

若 $P(x, y)$ 為標準位置角 θ 終邊上的一點

$$\text{令 } r = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \sin \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}$$

解析

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{y}{r} \quad (\because r > 0)$$

$$\Rightarrow \text{取 } r = 4, \quad y = \sqrt{7}$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow 4 = \sqrt{x^2 + 7}$$

$$\Rightarrow 16 = x^2 + 7$$

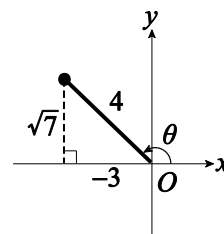
$$\Rightarrow x^2 = 9$$

$$\Rightarrow x = \pm 3$$

$$\because \theta \text{ 為第二象限角} \Rightarrow x < 0$$

$$\therefore x = -3$$

$$\text{則 } \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-3}{4}$$



6. 技巧與分析

獨立事件：若 A 、 B 為獨立事件
 $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

解析

令 $P(\text{甲}) = 0.5$ ，表示甲獲利機率

$P(\text{乙}) = 0.8$ ，表示乙獲利機率

$P(\text{兩人同時獲利}) = P(\text{甲} \cap \text{乙})$

\therefore 投資互不影響

\therefore 兩人投資獲利獨立

$$\Rightarrow P(\text{甲} \cap \text{乙}) = P(\text{甲}) \times P(\text{乙}) \\ = 0.5 \times 0.8 = 0.4$$

7. 技巧與分析

(1) 二次不等式：若 $a < b$ 且 $(x-a)(x-b) \leq 0$

$$\Rightarrow a \leq x \leq b$$

(2) 絕對值不等式： $|x| \leq k$ ($k \geq 0$)

$$\Rightarrow -k \leq x \leq k$$

解析

如題目所敘述， x 的範圍為 $-1 \leq x \leq 5$

考慮每個選項所得出 x 解之情形

(A) $|x-1| \leq 4$

$$\Rightarrow -4 \leq x-1 \leq 4$$

$$\Rightarrow -3 \leq x \leq 5$$

(B) $|x+1| \leq 5$

$$\Rightarrow -5 \leq x+1 \leq 5$$

$$\Rightarrow -6 \leq x \leq 4$$

(C) $x^2 - 4x - 5 \leq 0$

$$\Rightarrow (x-5)(x+1) \leq 0$$

$$\Rightarrow -1 \leq x \leq 5$$

(D) $x^2 + 6x + 5 \leq 0$

$$\Rightarrow (x+1)(x+5) \leq 0$$

$$\Rightarrow -5 \leq x \leq -1$$

故選(C)

8. 技巧與分析

利用樹狀圖解題

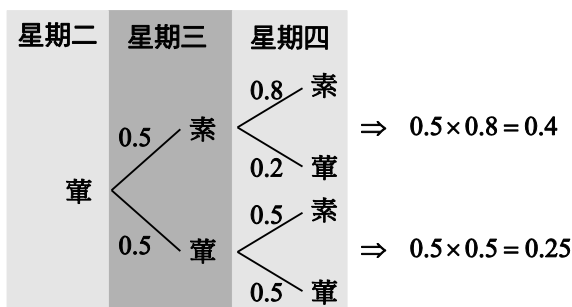
解析

若 $\overset{P}{\text{葷}} \rightarrow \text{素}$ ，表示今天葷食隔天素食之機率為 P

根據題目 $\overset{0.8}{\text{素}} \rightarrow \text{素}$ 且 $\overset{0.5}{\text{葷}} \rightarrow \text{素}$

$$\Rightarrow \overset{0.2}{\text{素}} \rightarrow \text{葷} \text{ 且 } \overset{0.5}{\text{葷}} \rightarrow \text{葷}$$

畫樹狀圖：



故星期四用素食的機率為 $0.4 + 0.25 = 0.65$

9. 技巧與分析

了解常態分配圖之比例

解析

$$85 = 65 + 20 = 65 + 2 \times 10 = \mu + 2\sigma$$

根據圖(二)，高於 85 分的比例為

$$50\% - 34\% - 13.5\% = 2.5\%$$

故約有 $3600 \times 2.5\% = 90$ 人高於 85 分

$$\Rightarrow 51 \leq x \leq 150$$

故選(B)

10. 技巧與分析

標準差不受加減數值影響

解析

數據皆加 20 分

\Rightarrow 平均數、中位數、眾數也會提高 20 分

但標準差不變 (標準差只受倍率影響)

故選(C)

11. 技巧與分析

(1) $\log x = \text{首數} + \text{尾數}$ ，若首數 $n > 0$

$$\Leftrightarrow x \text{ 為 } n+1 \text{ 位數}$$

(2) $\log_a b = x \Leftrightarrow b = a^x$

解析

試卷有提供 $\log 2 \approx 0.3010$

$$\text{考慮 } \log_{10} 2^{1000} = 1000 \times \log_{10} 2 \approx 1000 \times 0.3010$$

$$= 301$$

$$\therefore \log_{10} 2^{1000} \approx 301$$

$$\Rightarrow 2^{1000} \approx 10^{301}$$

[另解]

$$\log 2^{1000} \approx 1000 \times 0.3010 = 301$$

故 2^{1000} 為 $301+1=302$ 位數

- (A) $\log 10^{100} = 100 \Rightarrow 10^{100}$ 為 101 位數
(B) $\log 10^{200} = 200 \Rightarrow 10^{200}$ 為 201 位數
(C) $\log 10^{300} = 300 \Rightarrow 10^{300}$ 為 301 位數
(D) $\log 10^{400} = 400 \Rightarrow 10^{400}$ 為 401 位數
故選(C)

12. 技巧與分析

- (1) $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$
(2) $a^1 \times a^{-1} = a^{1+(-1)} = a^0 = 1$ 之倒數性質

解析

$$\begin{aligned} a^3 + a^{-3} &= (a + a^{-1})^3 - 3a \times a^{-1} (a + a^{-1}) \\ &= 2^3 - 3 \times 1 \times 2 = 2 \end{aligned}$$

13. 技巧與分析

- (1) 斜截式： $y = mx + b \Rightarrow m$ 表示斜率
(2) $L_1 // L_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$
(若 L_1 及 L_2 不為鉛直線)

解析

$$\begin{aligned} x = -3 \text{ 代入 } y = x^2 \\ \Rightarrow y = 9 \Rightarrow \text{過點 } A(-3, 9) \\ x = 1 \text{ 代入 } y = x^2 \\ \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \text{過點 } B(1, 1) \end{aligned}$$

$$m_{AB} = \frac{1-9}{1-(-3)} = \frac{-8}{4} = -2$$

已知 $y = mx + b$ 中 m 表示斜率

$$\text{且 } L_1 // L_2 \Rightarrow m_1 = m_2$$

$$\therefore y = -2x \text{ 之斜率為 } -2 = m_{AB}$$

\therefore 直線 \overleftrightarrow{AB} 與 $y = -2x$ 平行

14. 技巧與分析

除法原理：

$$\text{被除式} = \text{除式} \times \text{商式} + \text{餘式}$$

解析

設 $f(x)$ 除以 $(x+1)^3$ 的商式為 $q(x)$

由除法原理知：

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)^3 \times q(x) + (x^2 - 2x + 3) \\ &= \underbrace{(x+1)^2 [(x+1) \times q(x)]}_{\textcircled{1}} + \underbrace{x^2 - 2x + 3}_{\textcircled{2}} \end{aligned}$$

①式可被 $(x+1)^2$ 整除

$$\text{又 } (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

將②式除以 $x^2 + 2x + 1$

即

$$\begin{array}{r} 1 \\ x^2 + 2x + 1 \overline{) x^2 - 2x + 3} \\ \underline{x^2 + 2x + 1} \\ -4x + 2 \end{array}$$

故 $f(x)$ 除以 $(x+1)^2$ 之餘式為 $-4x+2$

即 $a = -4$ ， $b = 2$

所以 $a+b = -4+2 = -2$

〔另解〕

令 $f(x)$ 除以 $(x+1)^3$ 之商式為 $q(x)$

根據除法原理

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)^3 q(x) + (x^2 - 2x + 3) \\ &= (x+1)^3 q(x) + (x^2 + 2x + 1) + (-4x + 2) \\ &= (x+1)^3 q(x) + (x+1)^2 + (-4x + 2) \\ &= (x+1)^2 [(x+1)q(x) + 1] + (-4x + 2) \end{aligned}$$

根據除法原理 $f(x)$ 除以 $(x+1)^2$ 之商式為

$(x+1)q(x) + 1$ ，餘式為 $-4x+2$

$\therefore a = -4$ ， $b = 2$

$\Rightarrow a+b = -4+2 = -2$

15. 技巧與分析

(1) 兩點式：若 $x_1 \neq x_2$ ， $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$

$$\Rightarrow \vec{AB} : (y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

(2) 二元一次不等式在直角坐標系上判斷

解析

(1) 過 A 、 B 兩點直線

$$y = 0$$

\Rightarrow 依圖 $y \geq 0$

(2) 過 A 、 D 兩點直線

$$x = 0$$

\Rightarrow 依圖 $x \geq 0$

(3) 過 B 、 C 兩點直線 $x = 1$

\Rightarrow 依圖 $x \leq 1$

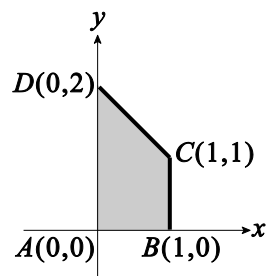
(4) 過 C 、 D 兩點直線 $(y-2) = \frac{2-1}{0-1}(x-0)$

$$\Rightarrow y - 2 = -x$$

$$\Rightarrow x + y = 2$$

\Rightarrow 依圖 $x + y \leq 2$

故選(D)



16. 技巧與分析

需會行列式降階

解析

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} &= (-1)^{2+1} \times 2 \times \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)^{2+2} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)^{2+3} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (-2) \times \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

與題目比較得

$$a = -2, x = 2, b = 1, y = -2, c = -1, z = 2$$
$$\therefore a + b + c + x + y + z = 0$$

17. 技巧與分析

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c, n \neq -1$$

$$\text{若 } \int f(x) dx = F(x)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

解析

$$\int_{-2}^2 (30x^5 - 16x^7 - 20x^3) dx$$
$$= \left(\frac{30}{5+1} x^{5+1} - \frac{16}{7+1} x^{7+1} - \frac{20}{3+1} x^{3+1} + c \right) \Big|_{-2}^2$$
$$= (5x^6 - 2x^8 - 5x^4 + c) \Big|_{-2}^2$$
$$= (5 \times 2^6 - 2 \times 2^8 - 5 \times 2^4 + c)$$
$$- [5 \times (-2)^6 - 2 \times (-2)^8 - 5 \times (-2)^4 + c]$$
$$= 0$$

18. 技巧與分析

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \text{ 之漸近線}$$

$$\Rightarrow a(y-k) + b(x-h) = 0$$

$$\text{及 } a(y-k) - b(x-h) = 0$$

解析

已知漸近線不會與其所屬之雙曲線有交點

$$\text{又 } C: \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1 \text{ 之漸近線為 } \begin{cases} 4x + 5y = 0 \\ 4x - 5y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{4}{5}x \\ y = \frac{4}{5}x \end{cases}$$

故選(D)

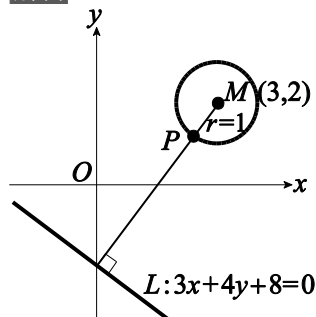
〔備註〕與雙曲線不相交的直線並非只有雙曲線之兩條漸近線而已

19. 技巧與分析

(1) 點到直線距離公式

(2) 最短距離 = $d - r$

解析



$$\text{圓 } C: (x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$$

\Rightarrow 得圓心 $M(3,2)$, 半徑 $r=1$

圓心 $M(3,2)$ 至直線 $L: 3x+4y+8=0$

$$\text{之距離為 } d(M,L) = \frac{|3 \times 3 + 4 \times 2 + 8|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$
$$= \frac{25}{5} = 5$$

$$\text{最短距離} = d(M,L) - r = 5 - 1 = 4$$

20. 技巧與分析

乘法原理

解析

參賽選手的選擇分為

選1位打單打及選2位打雙打兩步驟

先選1位打單打有 $C_1^5 = 5$ 種

再從剩下4位選2位打雙打有 $C_2^4 = 6$ 種

所以有 $5 \times 6 = 30$ 種

21. 技巧與分析

因式定理、多項式除法

解析

已知 -3 為其中一解

$\Rightarrow (x+3)$ 為 $x^3 - x^2 - 11x + 3$ 之因式

\Rightarrow 分解 $x^3 - x^2 - 11x + 3$

$$= (x+3)(x^2 - 4x + 1)$$

$$\begin{array}{r|l} 1 & -1 & -11 & +3 & -3 \\ -3 & +12 & -3 & & \end{array}$$

$$1 \quad -4 \quad +1 \quad | +0$$

$\therefore \alpha, \beta$ 為 $x^2 - 4x + 1 = 0$ 之兩根

根據根與係數得 $\alpha + \beta = 4, \alpha\beta = 1$

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 16 - 4 = 12$$

$$\therefore |\alpha - \beta| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

22. 技巧與分析

(1) 拋物線的標準式

(2) 解方程式

解析

$A(-1,4)$ 及 $B(5,4)$ 在 $y = C(x-h)^2$ 上

$$\Rightarrow 4 = C(-1-h)^2 \text{ 且 } 4 = C(5-h)^2$$

$$\Rightarrow C(-1-h)^2 = C(5-h)^2$$

因為 H 為拋物線，所以 $C \neq 0$

$$\Rightarrow (-1-h)^2 = (5-h)^2$$

$$\Rightarrow 1 + 2h + h^2 = 25 - 10h + h^2$$

$$\Rightarrow 12h = 24$$

$$\Rightarrow h = 2$$

$$\Rightarrow 4 = C(-1-2)^2$$

$$\Rightarrow C = \frac{4}{9}$$

$$\therefore C+h = \frac{4}{9} + 2 = \frac{22}{9}$$

23. 技巧與分析

(1) $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

(2) $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$

$$\text{若 } \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1 \text{ 且 } a_2 = b_2$$

解析

$$\overrightarrow{AB} = (2-3, -3-1) = (-1, -4)$$

$$\overrightarrow{AC} = (7-3, -1-1) = (4, -2)$$

$$\overrightarrow{CD} = (x-7, y+1)$$

$$\text{又 } \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD}$$

$$\Rightarrow (-1, -4) + 2(4, -2) = (x-7, y+1)$$

$$\Rightarrow (7, -8) = (x-7, y+1)$$

$$\Rightarrow x-7=7 \text{ 且 } y+1=-8$$

$$\Rightarrow x=14 \text{ 且 } y=-9$$

$$\Rightarrow x+y=5$$

24. 技巧與分析

$$a_n = a_m + (n-m)d$$

解析

依題意假設等差數列 $\langle a_n \rangle$

$$\Rightarrow a_{11} = 31, a_{16} = 56$$

$$\Rightarrow a_{16} = a_{11} + (16-11)d, d \text{ 為公差}$$

$$\Rightarrow 56 = 31 + 5d$$

$$\Rightarrow d = 5$$

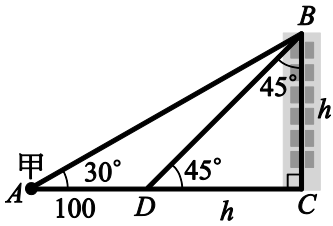
$$a_{20} = a_{16} + 4d = 56 + 4 \times 5 = 76$$

25. 技巧與分析

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

解析

依題作圖如下：



設大樓高 $\overline{BC} = h$ ，則 $\overline{DC} = h$

在 $\triangle ABC$ 中

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{100+h} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}h = 100 + h$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}h - h = 100$$

$$\Rightarrow h(\sqrt{3} - 1) = 100$$

$$\Rightarrow h = \frac{100}{\sqrt{3} - 1} = 50(\sqrt{3} + 1)$$

故所求為 $50(\sqrt{3} + 1)$